1.△ABC中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若a=1,c=2,cos B=$\frac{1}{2}$,则b=(　　)

A.$\sqrt{2}$ B.$\sqrt{3}$ C.2 D.3

1.B　由余弦定理可得b2=a2+c2-2accos B=12+22-2×1×2×$\frac{1}{2}$=3,所以b=$\sqrt{3}$(负值舍去),故选B.

2.在△ABC中,a,b,c分别是角A,B,C的对边,若(a-b-c)(a-b+c)+ab=0且sin A=$\frac{1}{2}$,则B=(　　)

A.$\frac{π}{2}$ B.$\frac{π}{3} $C.$\frac{π}{4}$ D.$\frac{π}{6}$

2.A　由(a-b-c)(a-b+c)+ab=0,可得a2+b2-c2=ab,所以cos C=$\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$=$\frac{1}{2}$,又C∈(0,π),所以C=$\frac{π}{3}$.因为sin A=$\frac{1}{2}$,A∈(0,π),所以A=$\frac{π}{6}$或A=$\frac{5π}{6}$.当A=$\frac{π}{6}$时,B=$\frac{π}{2}$;当A=$\frac{5π}{6}$时,A+C>π,不合题意.故选A.

3.在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若a=10,b=15,A=30°,则此三角形(　　)

A.无解 B.有一个解

C.有两个解 D.解的个数不确定

3.C　由a2=b2+c2-2bccos A,得102=152+c2-2×15×ccos 30°,∴c2-15$\sqrt{3}$c+125=0,解得c=$\frac{15\sqrt{3}\pm 5\sqrt{7}}{2}$∈(5,25),

∴c有两解,即△ABC有两个解,故选C.

4.△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知A=60°,c=8,a=b+2,那么△ABC的周长等于(　　)

A.12 B.20 C.26 D.10$\sqrt{3}$

4.B　根据cos A=$\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$及已知得$\frac{1}{2}$=$\frac{b^{2}+64-(b+2)^{2}}{16b}$,解得b=5,所以a=b+2=7,所以△ABC的周长等于7+5+8=20.故选B.

5.在△ABC中,$\frac{abc}{a^{2}+b^{2}+c^{2}}\left(\frac{cosA}{a}+\frac{cosB}{b}+\frac{cosC}{c}\right)$=　　　　.

5.答案　$\frac{1}{2}$

解析　原式=$\frac{abc}{a^{2}+b^{2}+c^{2}}$·

$\frac{bccosA+accosB+abcosC}{abc}$=

$\frac{bc\left(\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}\right)+ac\left(\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}\right)+ab\left(\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}\right)}{a^{2}+b^{2}+c^{2}}$=$\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{2(a^{2}+b^{2}+c^{2})}$=$\frac{1}{2}$.

6.在△ABC中,已知BC=7,AC=8,AB=9,则AC边上的中线长为　　　　.

6.答案　7

解析　由余弦定理的推论及已知得cos A=$\frac{AB^{2}+AC^{2}-BC^{2}}{2·AB·AC}$=$\frac{9^{2}+8^{2}-7^{2}}{2×9×8}$=$\frac{2}{3}$.设AC边上的中线长为x,由余弦定理,得x2=$\left(\frac{AC}{2}\right)^{2}$+AB2-2·$\frac{AC}{2}$·ABcos A=42+92-2×4×9×$\frac{2}{3}$=49,所以x=7(负值舍去).所以AC边上的中线长为7.

7.在△ABC中,AC=2$\sqrt{2}$,∠ABC=135°,则△ABC的外接圆的面积为(　　)

A.12π B.8π C.16π D.4π

7.D　设△ABC的外接圆的半径为R,

则由正弦定理可得$\frac{AC}{sin∠ABC}$=2R,

即2R=$\frac{2\sqrt{2}}{sin135°}$=$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$=4,所以R=2,

所以△ABC的外接圆的面积S=πR2=4π.故选D.

8.在△ABC中,a=2$\sqrt{3}$,b=2$\sqrt{2}$,∠B=45°,则∠A=(　　)

A.30°或150° B.60°或120°

C.60° D.30°

8.B　由$\frac{a}{sinA}$=$\frac{b}{sinB}$,得sin A=$\frac{asinB}{b}$=$\frac{2\sqrt{3}×\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∵0°<A<135°,∴∠A=60°或∠A=120°.

9.△ABC中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若3b·cos C=c(1-3cos B),则c∶a=(　　)

A.1∶3 B.4∶3

C.3∶1 D.3∶2

9.C　由3bcos C=c(1-3cos B)及正弦定理可得3sin Bcos C=sin C(1-3cos B),化简可得sin C=3sin(B+C).又A+B+C=π,

∴sin C=3sin A,∴c∶a=sin C∶sin A=3∶1.故选C.

10.设△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若bcos C+ccos B=asin A,则△ABC的形状为(　　)

A.锐角三角形 B.直角三角形 C.钝角三角形 D.不确定

10.B　解法一:由bcos C+ccos B=asin A及正弦定理得sin Bcos C+sin Ccos B=sin2A,即sin(B+C)=sin2A,即sin A=sin2A.易知0<A<π,sin A≠0,所以sin A=1,即A=$\frac{π}{2}$,所以△ABC为直角三角形.故选B.

解法二:由余弦定理的推论及已知得b·$\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$+c·$\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}$=a·sin A,整理得2a2=2a2sin A,易知a2≠0,所以sin A=1,又0<A<π,所以A=$\frac{π}{2}$,所以△ABC为直角三角形.故选B.

11.在△ABC中,cos2 $\frac{B}{2}$=$\frac{a+c}{2c}$(a,b,c分别为角A,B,C的对边),则△ABC的形状为(　　)

A.等边三角形 B.直角三角形 C.等腰三角形或直角三角形 D.等腰直角三角形

11.B　由cos2 $\frac{B}{2}$=$\frac{a+c}{2c}$可得,

$\frac{1+cosB}{2}$=$\frac{a+c}{2c}$,即cos B=$\frac{a}{c}$.

解法一:由余弦定理的推论可得$\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}$=$\frac{a}{c}$,整理,得a2+b2=c2,

∴△ABC为直角三角形.无法判断其是不是等腰三角形.故选B.

解法二:由正弦定理可得cos B=$\frac{sinA}{sinC}$,即cos Bsin C=sin A.

又A+B+C=π,∴sin A=sin(B+C),

∴cos Bsin C=sin(B+C)=sin Bcos C+cos Bsin C,即sin Bcos C=0,

∴sin B=0或cos C=0.

∵B,C∈(0,π),

∴cos C=0,C=$\frac{π}{2}$.

∴△ABC为直角三角形.无法判断其是不是等腰三角形.故选B.

12、在中，内角，，所对应的边分别为，，，若，且，则 \_\_\_\_\_\_\_\_。

12.【答案】

13、的内角的对边分别为，已知

，则角

13.45

14、直角△ABC中，∠C＝90°，D在BC上，CD＝2DB，tan∠BAD＝，则＝

14.或

15.在中，分别为角的对边，，若，则 ．

15.【答案】

【解析】先利用余弦定理可求得，再根据正弦定理知

16.如图中,已知点在边上,, ,

,则

16.。

17.【详解】

由可知，，解得，

由基本不等式得，．

，

令，则，，

，在，上单调递增，

（4），即的最小值为．

18.在中，己知,则= .

18.【答案】

19、在中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知，则的最小值 .

19.【答案】



20.若△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,面积S=$\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{4}$=$\frac{a^{2}}{3sinA}$,则sin B= (　　)

A.$\frac{\sqrt{6}}{3}$ B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

20. D　∵S=$\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{4}$,∴$\frac{1}{2}$absin C=$\frac{2abcosC}{4}$,即sin C=cos C,∴C=$\frac{π}{4}$.

∵S=$\frac{a^{2}}{3sinA}$,∴$\frac{1}{2}$bcsin A=$\frac{a^{2}}{3sinA}$,由正弦定理得$\frac{1}{2}$sin Bsin Csin A=$\frac{sin^{2}A}{3sinA}$,

即sin Bsin C=$\frac{2}{3}$,∴sin B=$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.故选D.

21.在△ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,且BC边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{6}$a,则$\frac{b}{c}$+$\frac{c}{b}$的最大值为 (　　)

A.8 B.6 C.3$\sqrt{2}$ D.4

21. D　∵BC边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{6}$a,

∴S△ABC=$\frac{1}{2}$a×$\frac{\sqrt{3}}{6}$a=$\frac{1}{2}$bcsin A,

∴a2=2$\sqrt{3}$bcsin A,由余弦定理a2=b2+c2-2bccos A可得2$\sqrt{3}$bcsin A=b2+c2-2bccos A,整理得,$\frac{b^{2}+c^{2}}{bc}$=2$\sqrt{3}$sin A+2cos A,即$\frac{b}{c}$+$\frac{c}{b}$=4sin$\left(A+\frac{π}{6}\right)$.

∵A∈(0,π),∴A+$\frac{π}{6}$∈$\left(\frac{π}{6},\frac{7}{6}π\right)$,

∴当A+$\frac{π}{6}$=$\frac{π}{2}$,即A=$\frac{π}{3}$时,

4sin$\left(A+\frac{π}{6}\right)$有最大值,为4.

∴$\frac{b}{c}$+$\frac{c}{b}$的最大值为4.

22..在锐角△ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,△ABC的面积为S,若sin(A+C)=$\frac{2S}{b^{2}-c^{2}}$,则tan C+$\frac{1}{2tan(B-C)}$的最小值为 (　　)

A.$\sqrt{2}$ B.2 C.1 D.2$\sqrt{2}$

22. A　因为sin(A+C)=$\frac{2S}{b^{2}-c^{2}}$,即sin B=$\frac{2S}{b^{2}-c^{2}}$,

所以sin B=$\frac{acsinB}{b^{2}-c^{2}}$,因为sin B≠0,

所以b2=c2+ac,由余弦定理得,

c2+ac=a2+c2-2accos B,即a-2ccos B=c,

再由正弦定理得sin A-2sin Ccos B=sin C,

因为sin A-2sin Ccos B=sin(B+C)-2sin C·cos B=sin(B-C),所以sin(B-C)=sin C,

所以B-C=C或B-C+C=π,所以B=2C或B=π(舍去).

因为△ABC是锐角三角形,

所以$\left\{\begin{matrix}0<C<\frac{π}{2},\\0<2C<\frac{π}{2},\\0<π-3C<\frac{π}{2},\end{matrix}\right.$得$\frac{π}{6}$<C<$\frac{π}{4}$,

所以tan C∈$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$,

所以tan C+$\frac{1}{2tan(B-C)}$=tan C+$\frac{1}{2tanC}$≥$\sqrt{2}$,

当且仅当tan C=$\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.故选A.

23.在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若|$\vec{CA}$-$\vec{CB}$|=3,$\vec{CA}$·$\vec{CB}$=6,则△ABC面积的最大值为　　　　.

23.答案　$\frac{3\sqrt{33}}{4}$

解析　∵|$\vec{CA}$-$\vec{CB}$|=3,∴|$\vec{BA}$|=3,即c=3.

∵$\vec{CA}$·$\vec{CB}$=6,∴abcos C=6,∴cos C=$\frac{6}{ab}$.

由余弦定理得9=a2+b2-2abcos C=a2+b2-12≥2ab-12,∴ab≤$\frac{21}{2}$(当且仅当a=b时取等号).

∴S△ABC=$\frac{1}{2}$absin C=$\frac{1}{2}$ab$\sqrt{1-cos^{2}C}$

=$\frac{1}{2}$ab$\sqrt{1-\frac{36}{a^{2}b^{2}}}$=$\frac{1}{2}\sqrt{a^{2}b^{2}\left(1-\frac{36}{a^{2}b^{2}}\right)}$

=$\frac{1}{2}\sqrt{a^{2}b^{2}-36}$≤$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^{2}-36}$

=$\frac{3\sqrt{33}}{4}$.故△ABC面积的最大值为$\frac{3\sqrt{33}}{4}$.

24.在锐角△ABC中,BC=2,sin B+sin C=2sin A,则中线AD的取值范围是　　　　.

24.答案　$\left[\sqrt{3},\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

解析　设AB=c,AC=b,BC=a=2,根据正弦定理及sin B+sin C=2sin A,得b+c=2a=4,

∴c=4-b.

∵△ABC为锐角三角形,

∴$\left\{\begin{matrix}b^{2}+c^{2}=b^{2}+(4-b)^{2}>4,\\c^{2}+4=(4-b)^{2}+4>b^{2},\\b^{2}+4>c^{2}=(4-b)^{2},\end{matrix}\right.$解得$\frac{3}{2}$<b<$\frac{5}{2}$.

故bc=b(4-b)=-b2+4b$\left(\frac{3}{2}<b<\frac{5}{2}\right)$,结合二次函数的性质,得$\frac{15}{4}$<bc≤4.

∵$\vec{AD}$=$\frac{1}{2}$($\vec{AB}$+$\vec{AC}$),∴|$\vec{AD}$|

=$\frac{1}{2}\sqrt{\vec{AB}^{2}+\vec{AC}^{2}+2\vec{AB}·\vec{AC}·cos∠BAC}$

=$\frac{1}{2}\sqrt{b^{2}+c^{2}+2bc·\frac{b^{2}+c^{2}-4}{2bc}}$

=$\frac{1}{2}\sqrt{2b^{2}+2c^{2}-4}$=$\frac{1}{2}\sqrt{28-4bc}$,

∵$\frac{15}{4}$<bc≤4,∴$\sqrt{3}$≤$\frac{1}{2}\sqrt{28-4bc}$<$\frac{\sqrt{13}}{2}$,即AD的取值范围为$\left[\sqrt{3},\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

25.在△ABC中,a,b,c分别为角A,B,C所对的边,a=2$\sqrt{3}$,tan $\frac{A+B}{2}$+tan $\frac{C}{2}$=4,sin Bsin C=cos2 $\frac{A}{2}$.求A,B及b,c.

25.解析　由tan $\frac{A+B}{2}$+tan $\frac{C}{2}$=4,

得tan $\frac{π-C}{2}$+tan $\frac{C}{2}$=4,

即$\frac{sin \frac{π-C}{2}}{cos \frac{π-C}{2}}$+$\frac{sin \frac{C}{2}}{cos \frac{C}{2}}$=4,

整理得$\frac{cos^{2} \frac{C}{2}+sin^{2} \frac{C}{2}}{sin \frac{C}{2}cos \frac{C}{2}}$=4,

又∵sin C=2sin $\frac{C}{2}$·cos $\frac{C}{2}$,∴$\frac{2}{sinC}$=4,

∴sin C=$\frac{1}{2}$.

又C∈(0,π),∴C=$\frac{π}{6}$或C=$\frac{5π}{6}$.

又sin Bsin C=cos2 $\frac{A}{2}$=$\frac{1+cosA}{2}$=$\frac{1-cos(B+C)}{2}$,即2sin Bsin C=1-cos(B+C)=1-cos Bcos B+sin Bsin C,

∴cos Bcos C+sin Bsin C=1,

∴cos(B-C)=1,

∵B∈(0,π),∴B-C=0,

∴B=C=$\frac{π}{6}$,故A=$\frac{2π}{3}$.

由正弦定理得$\frac{b}{sinB}$=$\frac{c}{sinC}$=$\frac{a}{sinA}$=$\frac{2\sqrt{3}}{sin \frac{2π}{3}}$=4,

所以b=c=4sin $\frac{π}{6}$=2.故b=c=2,A=$\frac{2π}{3}$,B=$\frac{π}{6}$.