**三角形中的边角关系和面积公式**

1. 常用的三角形面积公式

（1）（分别是△ABC中*a*、*b*、*c*边上的高）；

（2）（三角形的面积等于任意两边与它们夹角的正弦值乘积的一半）.



2. 如图所示，在△ABC中，*a*、*b*、*c*分别为角A、B、C的对边，分别为*a*、*b*、*c*边上的高，R、*r*分别为△ABC的外接圆、内切圆的半径，，则△ABC的面积公式如下：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）；

（5）；

（6）.

**巩固练习**

1．在Δ*ABC*中，∠*A*＝120°，*AC*＝2，Δ*ABC*的面积为$2\sqrt{3}$，则*BC*边的长为（　　）

A．$2\sqrt{7}$ B．$\sqrt{7}$ C．$2\sqrt{3}$ D．$\sqrt{3}$

【解答】解：在△*ABC*中，*A*＝120°，*AC*＝2，且△*ABC*的面积为2$\sqrt{3}$，

可得$\frac{1}{2}$*AB*•*AC*sin*A*$=\frac{1}{2}×$2×*AC*$×\frac{\sqrt{3}}{2}=$2$\sqrt{3}$，

解得*AB*＝4．

由余弦定理可得：*BC*$=\sqrt{AB^{2}+AC^{2}-2AB⋅ACcos120°}=\sqrt{4+16+8}=$2$\sqrt{7}$．

故选：*A*．

2．在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，*B*$=\frac{2π}{3}$，*b*＝2$\sqrt{3}$，*b*2+*c*2﹣*a*2$=\sqrt{3}$*bc*．若∠*BAC*的平分线与*BC*交于点*E*，则*AE*＝（　　）

A．$\sqrt{6}$ B．$\sqrt{7}$ C．2$\sqrt{2}$ D．3

【解答】解：因为*b*2+*c*2﹣*a*2$=\sqrt{3}$*bc*，

所以cos*A*$=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为*A*∈（0，π），所以*A*$=\frac{π}{6}$，

因为*B*$=\frac{2π}{3}$，*b*＝2$\sqrt{3}$，

所以*C*＝π﹣*A*﹣*B*$=\frac{π}{6}$，

由正弦定理，可得$\frac{a}{sin\frac{π}{6}}=\frac{c}{sin\frac{π}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{sin\frac{2π}{3}}$，解得*a*＝*c*＝2，

因为∠*BAC*的平分线与*BC*交于点*E*，

所以$\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}$，即*CE*$=\sqrt{3}$*BE*，

所以由*BE*+*CE*＝*BE*$+\sqrt{3}$*BE*＝2，可得*BE*$=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-$1，

在△*ABE*中，由余弦定理可得*AE*$=\sqrt{AB^{2}+BE^{2}-2AB⋅BE⋅cosB}$

$=\sqrt{2^{2}+(\sqrt{3}-1)^{2}-2×2×(\sqrt{3}-1)×cos\frac{2π}{3}}=\sqrt{6}$．

故选：*A*．



3．三角形△*ABC*中，$B=\frac{π}{4}$，*BC*边上的高等于$\frac{1}{4}BC$，则tan∠*BAC*＝（　　）

A．$\frac{1}{2}$ B．$-\frac{1}{2}$ C．2 D．﹣2

【解答】解：如图所示，设*AD*＝*x*，则*BD*＝*x*，*DC*＝3*x*，

所以*AB*$=\sqrt{2}x，AC=\sqrt{10}x$，

在△*ABC*中，由余弦定理可得$cos∠BAC=\frac{AB^{2}+AC^{2}-BC^{2}}{2⋅AB⋅AC}=\frac{2x^{2}+10x^{2}-16x^{2}}{2×\sqrt{2}x×\sqrt{10}x}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

则$sin∠BAC=\sqrt{1-cos^{2}∠BAC}=\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{5}}{5})^{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$tan∠BAC=\frac{sin∠BAC}{cos∠BAC}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}}=-2$．

故选：*D*．



4．在△*ABC*中，*B*$=\frac{3π}{4}$，*BC*边上的高为*BC*长度的一半，则cos*A*＝（　　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$ C．$\frac{2}{3}$ D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解答】解：如图，*BC*边上的高*AD*恰为*BC*边长的一半，即*AD*＝*BD*$=\frac{a}{2}$

∴*AB*$=\frac{\sqrt{2}}{2}$*a*，

在△*ABC*中，由余弦定理得*AC*2＝*AB*2+*BC*2﹣2*AB*•*BC*cos∠*ABC*$=\frac{5}{2}$*a*2．

在△*ABC*中，由正弦定理得：$\frac{BC}{sinA}=\frac{AC}{sinB}$，可得：sin*A*$=\sqrt{\frac{1}{5}}$，

∵*A*∈（0，$\frac{π}{4}$），

∴可得：cos*A*$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

故选：*A*．



5．．在△*ABC*中，若sin*A*（sin*B*+cos*B*）﹣sin*C*＝0，sin*B*+cos2*C*＝0，*a*＝4，则△*ABC*的面积为（　　）

A．$2+4\sqrt{3}$ B．$4+\sqrt{3}$ C．$6+2\sqrt{3}$ D．$8+4\sqrt{3}$

【解答】解：∵由sin*A*（sin*B*+cos*B*）﹣sin*C*＝0，

∴sin*A*sin*B*+sin*A*cos*B*﹣sin（*A*+*B*）＝0．

∴sin*A*sin*B*+sin*A*cos*B*﹣sin*A*cos*B*﹣cos*A*sin*B*＝0．

∴sin*B*（sin*A*﹣cos*A*）＝0．

∵*B*∈（0，π），

∴sin*B*≠0，从而cos*A*＝sin*A*．

由*A*∈（0，π），知*A*$=\frac{π}{4}$，从而*B*+*C*$=\frac{3π}{4}$．

由sin*B*+cos2*C*＝0，得sin*B*+cos2（$\frac{3π}{4}-$*B*）＝0．

即sin*B*﹣sin2*B*＝0．可得sin*B*﹣2sin*B*cos*B*＝0．

∴由此得cos*B*$=\frac{1}{2}$，*B*$=\frac{π}{3}$，*C*$=\frac{5π}{12}$，

∵*a*＝4，由正弦定理可得$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，可得*b*＝2$\sqrt{6}$，

∴*S*△*ABC*$=\frac{1}{2}$*ab*sin*C*$=\frac{1}{2}×4×2\sqrt{6}×$sin$\frac{5π}{12}=$4$\sqrt{6}$sin（$\frac{π}{6}+\frac{π}{4}$）＝6+2$\sqrt{3}$．

故选：*C*．

6．2020年新型冠状病毒肺炎蔓延全国，作为主要战场的武汉，仅用了十余天就建成了“小汤山”模式的火神山医院和雷神山医院，再次体现了中国速度．随着疫情发展，某地也需要参照“小汤山”模式建设临时医院，其占地是由一个正方形和四个以正方形的边为底边、腰长为400*m*的等腰三角形组成的图形（如图所示），为使占地面积最大，则等腰三角形的底角为（　　）



A．$\frac{π}{3}$ B．$\frac{π}{4}$ C．$\frac{π}{6}$ D．$\frac{π}{8}$

【解答】解：设顶角为α；

由正弦定理可得4个等腰三角形的面积和为：4$×\frac{1}{2}×$400×400×sinα＝320000sinα

由余弦定理可得正方形边长为：$\sqrt{400^{2}+400^{2}-2×400×400cosα}=$400$\sqrt{2-2cosα}$；

故正方形面积为：160000（2﹣2cosα）＝320000（1﹣cosα）

所以所求占地的面积为：320000（sinα﹣cosα+1）＝320000（$\sqrt{2}$sin（$α-\frac{π}{4}$）+1]；

∴当$α-\frac{π}{4}=\frac{π}{2}$⇒α$=\frac{3π}{4}$时，占地面积最大，此时底角为：$\frac{π-\frac{3π}{4}}{2}=\frac{π}{8}$．

故选：*D*．

7．在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*的对边分别是*a*，*b*，*c*，且*BC*边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$，若sin*C*＝*k*sin*B*，则当*k*取最小值时，内角*A*的大小为（　　）

A．$\frac{π}{2}$ B．$\frac{π}{6}$ C．$\frac{π}{3}$ D．$\frac{2π}{3}$

【解答】解：因为sin*C*＝*k*sin*B*，所以*k*$=\frac{c}{b}$，不妨设*c*≥*b*，则*k*≥1，

因为*BC*边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$，所以$\frac{1}{2}×\frac{\sqrt{3}}{6}a×$*a*$=\frac{1}{2}$*bc*sin*A*，即*a*2＝2$\sqrt{3}$*bc*sin*A*，

由余弦定理*a*2＝*b*2+*c*2﹣2*bc*cos*A*，

所以*b*2+*c*2＝2$\sqrt{3}$*bc*sin*A*+2*bc*cos*A*，即$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=$2$\sqrt{3}$sin*A*+2cos*A*＝4sin（*A*$+\frac{π}{6}$），

令*t*$=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=$*k*$+\frac{1}{k}$，则*t*′＝1$-\frac{1}{k^{2}}$，

当*k*≥1时，*t*′≥0，所以*t*在[1，+∞）上是增函数，

当*k*＝1时，*t*＝2，即4sin（*A*$+\frac{π}{6}$）＝2，

所以*A*$+\frac{π}{6}=\frac{5π}{6}$，可得*A*$=\frac{2π}{3}$．

故选：*D*．

8．菱形*ABCD*的边长为6，∠*A*＝60°，如果点*P*是菱形内一点，且$PB=PD=2\sqrt{3}$，则线段*AP*的长为（　　）

A．$2\sqrt{3}$ B．$2\sqrt{2}$ C．$2\sqrt{2}$或$4\sqrt{2}$ D．$2\sqrt{3}$或$4\sqrt{3}$

【解答】解：当*P*与*A*在*BD*的异侧时：连接*AP*交*BD*于*M*，

∵*AD*＝*AB*，*DP*＝*BP*，

∴*AP*⊥*BD*（到线段两端距离相等的点在垂直平分线上），

在直角△*ABM*中，∠*BAM*＝30°，

∴*AM*＝*AB*•cos30°＝3$\sqrt{3}$，*BM*＝*AB*•sin30°＝3，

∴*PM*$=\sqrt{PB^{2}-BM^{2}}=\sqrt{3}$，

∴*AP*＝*AM*+*PM*＝4$\sqrt{3}$；

当*P*与*A*在*BD*的同侧时：连接*AP*并延长*AP*交*BD*于点

*AP*＝*AM*﹣*PM*＝2$\sqrt{3}$；

当*P*与*M*重合时，*PD*＝*PB*＝3，与*PB*＝*PD*＝2$\sqrt{3}$矛盾，舍去．

*AP*的长为4$\sqrt{3}$或2$\sqrt{3}$．

故选：*D*．





9．已知*a*，*b*，*c*分别为△*ABC*内角*A*，*B*，*C*的对边，*b*sin*C*＝2$\sqrt{2}$*c*•cos*B*，*b*$=\sqrt{3}$，则当△*ABC*的周长最大时，△*ABC*的面积为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C．$\frac{9\sqrt{3}}{4}$ D．3$\sqrt{2}$

【分析】利用正弦定理将*b*sin*C*＝2$\sqrt{2}$*c*•cos*B*中的边化角，可得tan*B*，sin*B*和cos*B*的值，再结合余弦定理和基本不等式求得*ac*$=\frac{9}{4}$，而*S*$=\frac{1}{2}$*ac*sin*B*，进而得解．

【解答】解：由正弦定理，知$\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，

∵*b*sin*C*＝2$\sqrt{2}$*c*•cos*B*，

∴sin*B*sin*C*＝2$\sqrt{2}$sin*C*cos*B*，

∵sin*C*≠0，∴sin*B*＝2$\sqrt{2}$cos*B*，即tan*B*＝2$\sqrt{2}$，

∴sin*B*$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，cos*B*$=\frac{1}{3}$，

由余弦定理知，

*b*2＝3＝*a*2+*c*2﹣2*ac*cos*B*＝（*a*+*c*）2$-\frac{8}{3}$*ac*≥（*a*+*c*）2$-\frac{8}{3}×(\frac{a+c}{2})^{2}=\frac{1}{3}$（*a*+*c*）2，当且仅当*a*＝*c*$=\frac{3}{2}$时，等号成立，

∴*a*+*c*≤3，此时*ac*$=\frac{9}{4}$，

∴△*ABC*的面积*S*$=\frac{1}{2}$*ac*sin*B*$=\frac{1}{2}×\frac{9}{4}×\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$．

故选：*A*．

10．（多选）如图，△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*．若*a*＝*b*，且$\sqrt{3}$（*a*cos*C*+*c*cos*A*）＝2*b*sin*B*，*D*是△*ABC*外一点，*DC*＝1，*DA*＝3，则下列说法正确的是（　　）



A．△*ABC* 是等边三角形

B．若*AC*＝2$\sqrt{3}$，则*A*，*B*，*C*，*D*四点共圆

C．四边形*ABCD*面积最大值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}+$3

D．四边形*ABCD*面积最小值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}-$3

利用三角函数恒等变换化简已知等式可求sin*B*，再利用*a*＝*b*，可知△*ABC*为等边三角形，从而判断*A*；

利用四点*A*，*B*，*C*，*D*共圆，四边形对角互补，从而判断*B*；

设*AC*＝*x*，*x*＞0，在△*ADC*中，由余弦定理可得*x*2＝10﹣6cos*D*，利用三角形的面积公式，三角函数恒等变换的，可求*S*四边形*ABCD*，利用正弦函数的性质，求出最值，判断*CD*．

【解答】解：∵$\sqrt{3}$（*a*cos*C*+*c*cos*A*）＝2*b*sin*B*，

∴$\sqrt{3}$（sin*A*cos*C*+sin*C*cos*A*）＝2sin*B*•sin*B*，即$\sqrt{3}$sin（*A*+*C*）$=\sqrt{3}$sin*B*＝2sin*B*•sin*B*，

∴由sin*B*≠0，可得sin*B*$=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴*B*$=\frac{π}{3}$或$\frac{2π}{3}$．

又∵*a*＝*b*．∴*B*＝∠*CAB*＝∠*ACB*$=\frac{π}{3}$，故*A*正确；

若四点*A*，*B*，*C*，*D*共圆，则四边形对角互补，由*A*正确知*D*$=\frac{2π}{3}$，

在△*ADC*中，∵*DC*＝1，*DA*＝3，∴*AC*$=\sqrt{DC^{2}+DA^{2}-2DC⋅DAcos\frac{2π}{3}}=\sqrt{13}\ne 2\sqrt{3}$，故*B*错；

等边△*ABC*中，设*AC*＝*x*，*x*＞0，

在△*ADC*中，由余弦定理，得*AC*2＝*AD*2+*CD*2﹣2*AD*•*CD*•cos*D*，

由于*AD*＝3，*DC*＝1，代入上式，得*x*2＝10﹣6cos*D*，

∴*S*四边形*ABCD*＝*S*△*ABC*+*S*△*ACD*$=\frac{1}{2}$*x*•*x*sin$\frac{π}{3}+\frac{1}{2}$•3sin*D*$=\frac{\sqrt{3}}{4}$*x*2$+\frac{3}{2}$sin*D*＝3sin（*D*$-\frac{π}{3}$）$+\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

∵*D*∈（0，π），∴$-\frac{\sqrt{3}}{2}＜sin(D-\frac{π}{3})\leq 1$，

∴四边形*ABCD*面积的最大值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}+$3，无最小值，

故*C*正确，*D*错误，

故选：*AC*．

11．已知△*ABC*的内角为*A*，*B*，*C*满足sin（*B*+*C*﹣*A*）+sin（*A*+*C*﹣*B*）+sin（*A*+*B*﹣*C*）$=\frac{1}{2}$，且△*ABC*的面积为2，则△*ABC*外接圆面积等于（　　）

A．2π B．4π C．8π D．16π

【解答】解：∵sin（*B*+*C*﹣*A*）+sin（*A*+*C*﹣*B*）+sin（*A*+*B*﹣*C*）$=\frac{1}{2}$，且*A*+*B*+*C*＝π，

∴sin2*A*+sin2*B*+sin2*C*$=\frac{1}{2}$，

∴2sin*A*cos*A*+2sin（*B*+*C*）cos（*B*﹣*C*）$=\frac{1}{2}$，

2sin*A*（cos（*B*﹣*C*）﹣cos（*B*+*C*））$=\frac{1}{2}$，

化为2sin*A*[﹣2sin*B*sin（﹣*C*）]$=\frac{1}{2}$，

∴sin*A*sin*B*sin*C*$=\frac{1}{8}$．

设外接圆的半径为*R*，

由正弦定理可得：$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=$2*R*，

由*S*$=\frac{1}{2}$*ab*sin*C*，及正弦定理得：sin*A*sin*B*sin*C*$=\frac{S}{2R^{2}}=\frac{1}{8}$，

由于*S*＝2，可得：*R*2＝4*S*＝8，可得*R*＝2$\sqrt{2}$，

∵△*ABC*外接圆面积*S*＝π*R*2＝8π．

故选：*C*．

12．（多选）已知△*ABC*中，角*A*、*B*、*C*所对的边分别是*a*、*b*、*c*且*a*＝6，4sin*B*＝5sin*C*，有以下四个命题中正确命题有 （　　）

A．△*ABC*的面积的最大值为40

B．满足条件的△*ABC*不可能是直角三角形

C．当*A*＝2*C*时，△*ABC*的周长为15

D．当*A*＝2*C*时，若*O*为△*ABC*的内心，则△*AOB*的面积为$\sqrt{7}$

对于*A*，运用圆的方程和三角形的面积公式，即可得到所求最大值；对于*B*，考虑勾股定理的逆定理，即可判断；对于*C*，运用正弦定理可得4*b*＝5*c*，运用三角函数的恒等变换，即可得到所求周长；对于*D*，运用正弦定理和三角函数的恒等变换、三角形的面积公式和等积法，即可得到所求面积．

【解答】解：以*BC*的中点为坐标原点，*BC*所在直线为*x*轴，可得*B*（﹣3，0），*C*（3，0），

4sin*B*＝5sin*C*，可得4*b*＝5*c*，设*A*（*m*，*n*），

可得4$\sqrt{(m-3)^{2}+n^{2}}=$5$\sqrt{(m+3)^{2}+n^{2}}$，平方可得16（*m*2+*n*2﹣6*m*+9）＝25（*m*2+*n*2+6*m*+9），

即有*m*2+*n*2$+\frac{82}{3}$*m*+9＝0，化为（*m*$+\frac{41}{3}$）2+*n*2＝（$\frac{40}{3}$）2，

则*A*的轨迹为以（$-\frac{41}{3}$，0），半径为$\frac{40}{3}$的圆，可得△*ABC*的面积的最大值为$\frac{1}{2}×$6$×\frac{40}{3}=$40，

故*A*对；

*a*＝6，4sin*B*＝5sin*C*即4*b*＝5*c*，设*b*＝5*t*，*c*＝4*t*，由36+16*t*2＝25*t*2，可得*t*$=\frac{4}{3}$，

满足条件的△*ABC*可能是直角三角形，故*B*错误；

*a*＝6，4sin*B*＝5sin*C*，*A*＝2*C*，可得*B*＝π﹣3*C*，

由正弦定理可得4*b*＝5*c*，可得*b*$=\frac{5c}{4}$，

由$\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，可得$\frac{\frac{5c}{4}}{sin(π-3C)}=\frac{c}{sinC}=\frac{\frac{5c}{4}}{sinC(4cos^{2}C-1)}$，

由sin*C*≠0，可得：4cos2*C*﹣1$=\frac{5}{4}$，解得：cos*C*$=\frac{3}{4}$，或$-\frac{3}{4}$（舍去），

sin*C*$=\sqrt{1-cos^{2}C}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，可得sin*A*＝2sin*C*cos*C*＝2$×\frac{3}{4}×\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

$\frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$，可得：*c*＝4，*b*＝5，则*a*+*b*+*c*＝15，

故*C*对；

*a*＝6，4sin*B*＝5sin*C*，*A*＝2*C*，可得*B*＝π﹣3*C*，

由正弦定理可得4*b*＝5*c*，可得*b*$=\frac{5c}{4}$，

由$\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，可得$\frac{\frac{5c}{4}}{sin(π-3C)}=\frac{c}{sinC}=\frac{\frac{5c}{4}}{sinC(4cos^{2}C-1)}$，

由sin*C*≠0，可得：4cos2*C*﹣1$=\frac{5}{4}$，解得：cos*C*$=\frac{3}{4}$，或$-\frac{3}{4}$（舍去），

sin*C*$=\sqrt{1-cos^{2}C}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，可得：sin*A*＝2sin*C*cos*C*＝2$×\frac{3}{4}×\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

$\frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$，可得：*c*＝4，*b*＝5，

*S*△*ABC*$=\frac{1}{2}$*bc*sin*A*$=\frac{1}{2}×$5×4$×\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$．

设△*ABC*的内切圆半径为*R*，则*R*$=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2×\frac{15\sqrt{7}}{4}}{4+5+6}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

*S*△*ABO*$=\frac{1}{2}$*cR*$=\frac{1}{2}×$4$×\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$．故*D*对．

故选：*ACD*．

13．已知△*ABC*，∠*BAC*＝120°，$BC=2\sqrt{3}$，*AD*为∠*BAC*的角平分线，则

（ⅰ）△*ABC*面积的取值范围为　$(0，\sqrt{3}]$　．

（ⅱ）$\frac{AB+4AC}{AD}$的最小值为　9　．

【解答】解：（ⅰ）可设△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，

可得*a*2＝*b*2+*c*2﹣2*bc*cos*A*＝*b*2+*c*2﹣2*bc*•（$-\frac{1}{2}$）≥2*bc*+*bc*＝3*bc*，

即有*bc*$\leq \frac{1}{3}$*a*2$=\frac{1}{3}×$12＝4，当且仅当*b*＝*c*＝2取得等号，

则*S*△*ABC*$=\frac{1}{2}$*bc*sin*A*$=\frac{1}{2}$*bc*•$\frac{\sqrt{3}}{2}\leq \frac{\sqrt{3}}{4}×$4$=\sqrt{3}$，

所以△*ABC*面积的取值范围为（0，$\sqrt{3}$]；

（ⅱ）由*S*△*ABC*＝*S*△*ABD*+*S*△*DAC*，

可得$\frac{1}{2}$*bc*sin120°$=\frac{1}{2}$*c*•*AD*•sin60°$+\frac{1}{2}$*b*•*AD*•sin60°，

化为$\frac{\sqrt{3}}{2}$*bc*$=\frac{\sqrt{3}}{2}$*AD*（*b*+*c*），

即为*AD*$=\frac{bc}{b+c}$，

所以$\frac{AB+4AC}{AD}=\frac{c+4b}{AD}=\frac{(b+c)(c+4b)}{bc}=\frac{c}{b}+\frac{4b}{c}+$5≥2$\sqrt{\frac{c}{b}⋅\frac{4b}{c}}+$5＝9，

当且仅当*c*＝2*b*时，取得等号，

则$\frac{AB+4AC}{AD}$的最小值为9．

故答案为：（ⅰ）（0，$\sqrt{3}$]，（ⅱ）9．



14．伴随着国内经济的持续增长，人民的生活水平也相应有所提升，其中旅游业带来的消费是居民消费领域增长最快的，因此挖掘特色景区，营造文化氛围尤为重要．某景区的部分道路如图所示，*AB*＝30*m*，$BC=40\sqrt{2}m$，*CD*＝50*m*，∠*ABC*＝∠*BCD*＝45°，要建设一条从点*A*到点*D*的空中长廊，则*AD*＝　40$\sqrt{2}$　*m*．



【解答】解：由题可知∠*ABC*＝∠*BCD*＝45°，所以*AB*∥*CD*．

由$\overset{\to }{AD}=\overset{\to }{AB}+\overset{\to }{BC}+\overset{\to }{CD}$，

则$\overset{\to }{AD^{2}}=\overset{\to }{AB^{2}}+\overset{\to }{BC^{2}}+\overset{\to }{CD^{2}}+2\overset{\to }{AB}⋅\overset{\to }{BC}+2\overset{\to }{AB}⋅\overset{\to }{CD}+2\overset{\to }{BC}⋅\overset{\to }{CD}$，

$\overset{\to }{AB}⋅\overset{\to }{BC}=\overset{\to }{|AB|}\overset{\to }{|BC|}cos135°=-1200$，

$\overset{\to }{AB}⋅\overset{\to }{CD}=\overset{\to }{|AB|}\overset{\to }{|CD|}cos0°=1500$，$\overset{\to }{BC}⋅\overset{\to }{CD}=\overset{\to }{|BC|}\overset{\to }{|CD|}cos135°=-2000$，

所以$\overset{\to }{AD^{2}}=900+3200+2500-2400+3000-4000=3200$，

则$\overset{\to }{|AD|}=40\sqrt{2}m$．

故答案为：40$\sqrt{2}$．

15．如图所示，在平面四边形*ABCD*中，*AB*＝1，*BC*＝2，△*ACD*是以*D*为顶点的等腰直角三角形，则△*BCD*面积的最大值为　1$+\frac{\sqrt{2}}{2}$　．



【解答】解：在△*ABC*中，设∠*ABC*＝α，∠*ACB*＝β，*AB*＝1，*BC*＝2，

余弦定理得*AC*2＝12+22﹣2×1×2cosα＝5﹣4cosα，

∵△*ACD*为等腰直角三角形，

设*CD*＝*AD*＝*t*，*AC*$=\sqrt{2}$*t*，

∴2*t*2＝5﹣4cosα，

由正弦定理得：$\frac{1}{sinβ}=\frac{AC}{sinα}=\frac{\sqrt{2}t}{sinα}$，

∴$\sqrt{2}$*t*sinβ＝sinα，

则2*t*2sinβ＝2*t*2﹣2*t*2cos2β＝sin2α＝1﹣cos2α，

可得2*t*2cos2β＝2*t*2﹣1+cos2α＝5﹣4cosα﹣1+cos2α＝（2﹣cosα）2，

可得$\sqrt{2}$*t*cosβ＝2﹣cosα，

∴*S*△*BCD*$=\frac{1}{2}$•2•*t*•sin（$\frac{π}{4}+$β）

＝*t*sin（$\frac{π}{4}+$β）$=\frac{\sqrt{2}}{2}$*t*cosβ$+\frac{\sqrt{2}}{2}$*t*sinβ

$=\frac{1}{2}$（2﹣cosα）$+\frac{1}{2}$sinα$=\frac{\sqrt{2}}{2}$sin（α$-\frac{π}{4}$）+1，

当α$=\frac{3π}{4}$时，sin（α$-\frac{π}{4}$）＝1，

（*S*△*BCD*）*max*＝1$+\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故答案为：1$+\frac{\sqrt{2}}{2}$．



16．四边形*ABCD*中，*AB*＝1，*BC*＝5，*CD*＝5，*DA*＝7，且∠*DAB*＝∠*BCD*＝90°，则对角线*AC*长为　4$\sqrt{2}$　．



【解答】解：设$|\overline{AC|}=x，∠B=θ$，

由∠*DAB*＝∠*BCD*＝90°，则∠*D*＝180°﹣θ，

△*ABC*中，$|\overline{AB|}=1，|\overline{BC}|=5$，$|\overline{AC|}=x$，

则$cosθ=\frac{1^{2}+5^{2}-x^{2}}{2×1×5}=\frac{26-x^{2}}{10}$；

△*ACD*中，$|\overline{CD|}=5，|\overline{DA|}=7$，$|\overline{AC|}=x$，

则$cos(180°-θ)=\frac{7^{2}+5^{2}-x^{2}}{2×7×5}=\frac{74-x^{2}}{70}$；

∵cos（180°﹣θ）＝﹣cosθ，

∴$\frac{74-x^{2}}{70}=-\frac{26-x^{2}}{10}⇒x=\sqrt{32}=$4$\sqrt{2}$．

故答案为：4$\sqrt{2}$

17．17．在①2*a*cos*C*+*c*＝2*b*，②cos2$\frac{B-C}{2}-cosBcosC=\frac{3}{4}$，③（sin*B*+sin*C*）2＝sin2*A*+3sin*B*sin*C*，这三个条件中任选一个补充在下面的横线上，并加以解答．在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，且\_\_\_\_\_\_．

（1）求角*A*的大小；

（2）若*a*$=\sqrt{3}$，△*ABC*的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求△*ABC*的周长．

【解答】解：（1）选①，由正弦定理得2sin*A*cos*C*+sin*C*＝2sin*B*＝2sin（*A*+*C*）＝2（sin*A*cos*C*+cos*A*sin*C*），

即sin*C*（2cos*A*﹣1）＝0．

因为*C*∈（0，π），

所以sin*C*≠0，

所以$cosA=\frac{1}{2}$．

又*A*∈（0，π），从而得$A=\frac{π}{3}$．

选②，因为$cos^{2}\frac{B-C}{2}-cosBcosC=\frac{1+cos(B-C)}{2}-cosBcosC$

$=\frac{1-cosBcosC+sinBsinC}{2}=\frac{1-cos(B+C)}{2}=\frac{3}{4}$，

所以$cos(B+C)=-\frac{1}{2}$，$cosA=-cos(B+C)=\frac{1}{2}$．

又因为$A\in (0，\frac{π}{2})$，可得$A=\frac{π}{3}$．

选③，因为（sin*B*+sin*C*）2＝sin2*A*+3sin*B*sin*C*，

所以sin2*B*+sin2*C*+2sin*B*sin*C*＝sin2*A*+3sin*B*sin*C*，

即sin2*B*+sin2*C*﹣sin2*A*＝sin*B*sin*C*，

所以*b*2+*c*2﹣*a*2＝*bc*，$cosA=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}=\frac{1}{2}$．

因为*A*∈（0，π），可得$A=\frac{π}{3}$，

（2）由余弦定理*a*2＝*b*2+*c*2﹣2*bc*cos*A*，得*b*2+*c*2﹣*bc*＝3，

由$S\_{△ABC}=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}$*bc*•$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得*bc*＝2，

所以*b*+*c*＝3，

故$a+b+c=3+\sqrt{3}$．

18．在△*ABC*中，*a*，*b*，*c*分别是角*A*，*B*，*C*所对的边，已知*a*＝1，$\overset{\to }{m}=(1，-\sqrt{3})$，$\overset{\to }{n}=$（sin*A*，cos*A*），且$\overset{\to }{m}$⊥$\overset{\to }{n}$．

（1）求角*A*的大小；

（2）若△*ABC*的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，求*b*+*c*的值．

（3）求△*ABC*周长的取值范围．

【解答】解：（1）由$\overset{\to }{m}=(1，-\sqrt{3})$，$\overset{\to }{n}=$（sin*A*，cos*A*），且$\overset{\to }{m}$⊥$\overset{\to }{n}$，

得$\overset{\to }{m}$•$\overset{\to }{n}=$sin*A*$-\sqrt{3}$cos*A*＝0，

∴tan*A*$=\sqrt{3}$；

又*A*∈（0，π），

∴*A*$=\frac{π}{3}$；

（2）由余弦定理得*a*2＝*b*2+*c*2﹣2*bc*cos*A*，

即1＝*b*2+*c*2﹣2*bc*cos$\frac{π}{3}$，

∴*b*2+*c*2﹣*bc*＝1；

又△*ABC*的面积为*S*$=\frac{1}{2}$*bc*sin*A*$=\frac{1}{2}$*bc*sin$\frac{π}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

∴*bc*＝1，

∴（*b*+*c*）2＝*b*2+*c*2+2*bc*＝2+2×1＝4，

∴*b*+*c*＝2．

（3）由（1）知*A*$=\frac{π}{3}$，*a*＝1，则$\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\frac{a}{sinA}=\frac{1}{sin\frac{π}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，

∴*b*$=\frac{2}{\sqrt{3}}$sin*B*，*c*$=\frac{2}{\sqrt{3}}$sin*C*，*C*＝π﹣*A*﹣*B*$=\frac{2π}{3}-$*B*，*B*∈（0，$\frac{2π}{3}$）；

∴*l*＝*a*+*b*+*c*＝1$+\frac{2}{\sqrt{3}}$sin*B*$+\frac{2}{\sqrt{3}}$sin（$\frac{2π}{3}-$*B*）＝1$+\frac{2}{\sqrt{3}}$（$\frac{3}{2}$sin*B*$+\frac{\sqrt{3}}{2}$cos*B*）＝1+2sin（*B*$+\frac{π}{6}$），

又*B*∈（0，$\frac{2π}{3}$），∴*B*$+\frac{π}{6}$∈（$\frac{π}{6}$，$\frac{5π}{6}$），

∴sin（*B*$+\frac{π}{6}$）∈（$\frac{1}{2}$，1]，

∴2＜1+2sin（*B*$+\frac{π}{6}$）≤3，

△*ABC*周长的取值范围（2，3]．

19．已知*a*，*b*，*c*分别是△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*所对的边，且满足$a(sinA-\frac{1}{2}sinB)=(sinC+sinB)(c-b)$，*c*＝4．

（Ⅰ）求△*ABC*的外接圆的半径；

（Ⅱ）求△*ABC*的面积的最大值．

【解答】解：（Ⅰ）由题意及正弦定理得到$a(a-\frac{1}{2}b)=(c+b)(c-b)$，

即$a^{2}+b^{2}-c^{2}=\frac{ab}{2}$，

由余弦定理可得$cosC=\frac{1}{4}$，

所以$sinC=\frac{\sqrt{15}}{4}$．

设△*ABC*的外接圆的半径为*R*．

因为$\frac{c}{sinC}=2R$，即$\frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R$，

解得$R=\frac{8\sqrt{15}}{15}$．

（Ⅱ）因为*c*2＝*a*2+*b*2﹣2*ab*cos*C*，且*c*＝4，

所以$16=a^{2}+b^{2}-\frac{ab}{2}\geq 2ab-\frac{ab}{2}=\frac{3ab}{2}$，即$ab\leq \frac{32}{3}$，

所以$S\_{△ABC}=\frac{1}{2}absinC\leq \frac{1}{2}×\frac{32}{3}×\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$，

当且仅当*a*＝*b*时取等号．

故△*ABC*的面积的最大值为$\frac{4\sqrt{15}}{3}$．

20．在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，若$\sqrt{3}$*a*sin*B*﹣*b*cos*B*cos*C*＝*c*cos2*B*．

（1）求角*B*的值；

（2）若*A*$=\frac{π}{6}$，且△*ABC*的面积为7$\sqrt{3}$，求*BC*边上的中线*AM*的长．

【解答】解：（1）因为$\sqrt{3}$*a*sin*B*﹣*b*cos*B*cos*C*＝*c*cos2*B*，

所以由正弦定理可得$\sqrt{3}$sin*A*sin*B*﹣sin*B*cos*B*cos*C*＝sin*C*cos2*B*，可得$\sqrt{3}$sin*A*sin*B*＝cos*B*（sin*B*cos*C*+sin*C*cos*B*）＝cos*B*sin*A*，

因为sin*A*≠0，可得$\sqrt{3}$sin*B*＝cos*B*，即tan*B*$=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由*B*∈（0，π），可得*B*$=\frac{π}{6}$．

（2）由已知*A*$=\frac{π}{6}$，则△*ABC*是等腰三角形，∠*C*$=\frac{2π}{3}$，设*AC*＝*BC*＝2*a*，

可得*S*△*ABC*$=\frac{1}{2}$*AC*•*BC*•sin∠*ACB*$=\frac{1}{2}$（2*a*）2sin$\frac{2π}{3}=\sqrt{3}$*a*2，

由已知△*ABC*的面积为7$\sqrt{3}$，得*a*2＝7，*a*$=\sqrt{7}$，可得*AC*＝*BC*＝2$\sqrt{7}$，

△*ACM*中，由余弦定理，*AM*2＝*CA*2+*CM*2﹣2*CA*•*CM*•cos$\frac{2π}{3}$

＝（2$\sqrt{7}$）2+（$\sqrt{7}$）2﹣2×2$\sqrt{7}×\sqrt{7}×$（$-\frac{1}{2}$）

＝49，

所以*AM*＝7．

21．在△*ABC*中，*a*，*b*，*c*分别是角*A*，*B*，*C*的对边，已知向量$\overset{\to }{m}=(3a-c，b)$，$\overset{\to }{n}=(cosB，-cosC)$，且$\overset{\to }{m}⊥\overset{\to }{n}$．

（1）求cos*B*的值；

（2）若*b*＝2，△*ABC*的面积为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，求△*ABC*的周长．

【解答】解：（1）根据题意，向量$\overset{\to }{m}=(3a-c，b)$，$\overset{\to }{n}=(cosB，-cosC)$，且$\overset{\to }{m}⊥\overset{\to }{n}$．

则$\overset{\to }{m}$•$\overset{\to }{n}=$（3*a*﹣*c*）cos*B*﹣*b*cos*C*＝0，

又由正弦定理可得（3sin*A*﹣sin*C*）cos*B*﹣sin*B*cos*C*＝0，

即3sin*A*cos*B*﹣sin*C*cos*B*﹣sin*B*cos*C*＝3sin*A*cos*B*﹣sin（*B*+*C*）＝0；

又sin（*B*+*C*）＝sin*A*，所以3sin*A*cos*B*﹣sin*A*＝0，

又*A*∈（0，π），所以sin*A*≠0，则cos*B*$=\frac{1}{3}$

（2）由（1）的结论，cos*B*$=\frac{1}{3}$，则*b*2＝*a*2+*c*2﹣2*ac*cos*B*，即4＝*a*2+*c*2$-\frac{2}{3}$*ac*＝（*a*+*c*）2$-\frac{8}{3}$*ac*，

又由△*ABC*的面积为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，即*S*$=\frac{1}{2}$*ac*sin*B*$=\frac{\sqrt{6}}{4}$，sin*B*$=\sqrt{1-cos^{2}B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

则有$\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{2}$*ac*$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则*ac*$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

则（*a*+*c*）2＝4$+\frac{8}{3}$*ac*＝4+2$\sqrt{3}=$（$\sqrt{3}+$1）2，则*a*+*c*$=\sqrt{3}+$1，

则有*a*+*b*+*c*$=\sqrt{3}+$1+2$=\sqrt{3}+$3，

故△*ABC*的周长为$\sqrt{3}+$3．

22．如图，在梯形*ABCD*中，*AB*∥*CD*，*AB*＝2，*CD*＝5，∠*ABC*$=\frac{2π}{3}$．

（1）若*AC*＝2$\sqrt{7}$，求梯形*ABCD*的面积；

（2）若*AC*⊥*BD*，求tan∠*ABD*．



【解答】解：（1）设*BC*＝*x*，在△*ABC*中，由余弦定理可得28＝*x*2+4﹣2*x*•2•（$-\frac{1}{2}$），整理可得：*x*2+2*x*﹣24＝0，解得*x*＝4，

所以*BC*＝4，则*S*△*ABC*$=\frac{1}{2}×$2×4$×\frac{\sqrt{3}}{2}=$2$\sqrt{3}$，

因为*CD*$=\frac{5AB}{2}$，所以*S*△*ACD*$=\frac{5S\_{△ABC}}{2}=$5$\sqrt{3}$，

所以*S*梯形*ABCD*＝*S*△*ABC*+*S*△*ACD*＝7$\sqrt{3}$；

（2）设∠*ABD*＝α，则∠*BDC*＝α，∠*BAC*$=\frac{π}{2}-$α，∠*DBC*$=\frac{2π}{3}-$α，∠*BCA*＝α$-\frac{π}{6}$，

在△*ABC*中，由正弦定理可得$\frac{2}{sin(α-\frac{π}{6})}=\frac{BC}{sin(\frac{π}{2}-α)}$，

在△*BCD*中，由正弦定理可得$\frac{5}{sin(\frac{2}{3}π-α)}=\frac{BC}{sinα}$，

两式相除可得$\frac{2sin(\frac{2}{3}π-α)}{5sin(α-\frac{π}{6})}=\frac{sinα}{sin(\frac{π}{2}-α)}$，展开可得$\frac{2⋅(\frac{\sqrt{3}}{2}cosα+\frac{1}{2}sinα)}{5⋅(\frac{\sqrt{3}}{2}sinα-\frac{1}{2}cosα)}=\frac{sinα}{cosα}$，

所以可得5$\sqrt{3}$sin2α﹣7sinαcosα﹣2$\sqrt{3}$cos2α＝0，

即5$\sqrt{3}$tan2α﹣7tanα﹣2$\sqrt{3}=$0，

解得tanα$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$或tanα$=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，

又因为α∈（$\frac{π}{6}$，$\frac{π}{2}$），

所以tanα$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即tan∠*ABD*$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

23．小明在东方明珠广播电视塔底端的正东方向上的*C*处，沿着与电视塔（*AB*）垂直的水平马路*CD*驾驶机动车行驶，以南偏西60°的方向每小时60千米的速度开了15分钟以后，在点*D*处望见电视塔的底端*B*在东北方向上，设沿途*E*处观察电视塔的仰角∠*AEB*＝α，α的最大值为60°．

（1）小明开车从*C*处出发到*D*处，几小时后其所在位置观察电视塔的仰角达到最大值60°，约为多少分钟？（分钟保留两位小数）

（2）求东方明珠塔*AB*的高度约为多少米．（保留两位小数）



【解答】解：（1）依题意知在△*DBC*中∠*BCD*＝30°，∠*DBC*＝180°﹣45°＝135°，

*CD*＝60000$×\frac{1}{60}×$15＝15000（*m*），∠*D*＝180°﹣135°﹣30°＝15°，

由正弦定理得$\frac{CD}{sin∠DBC}=\frac{BC}{sin∠D}$，

∴*BC*$=\frac{CD⋅sin∠D}{sin∠DBC}=\frac{15000×sin15°}{sin135°}=\frac{15000×\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$7500（$\sqrt{3}-$1）（*m*），

在Rt△*ABE*中，tanα$=\frac{AB}{BE}$，

∵*AB*为定长，可得当*BE*的长最小时，α取最大值60°，这时*BE*⊥*CD*，

当*BE*⊥*CD*时，在Rt△*BEC*中，可得：*EC*＝*BC*•cos∠*BCE*＝7500（$\sqrt{3}-$1）•$\frac{\sqrt{3}}{2}=$3750（3$-\sqrt{3}$）（*m*），

设该人沿南偏西60°的方向走到仰角α最大时，走了*t*分钟，

则*t*$=\frac{EC×60}{60000}=\frac{3750(3-\sqrt{3})×60}{60000}≈$4.75（分钟），

（2）由（1）知当α取得最大值60°时，*BE*⊥*CD*，在Rt△*BEC*中，*BE*＝*BC*•sin∠*BCD*，

∴*AB*＝*BE*•tan60°＝*BC*•sin∠*BCD*•tan60°＝7500（$\sqrt{3}-$1）$×\frac{1}{2}×\sqrt{3}=$3750（3$-\sqrt{3}$）≈4754.81米（*m*）．

即所求塔高为4754.81米*m*．



24．△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，已知$2asinC=\sqrt{3}csinB$．

（1）若*b*$=4\sqrt{3}$，*C*＝120°，求△*ABC*的面积*S*；

（2）若*b*：*c*＝2：3，求$\frac{\sqrt{3}sin2A-sinB}{sinC}$．

【解答】解：（1）由正弦定理知，*c*sin*B*＝*b*sin*C*；

由2*a*sin*C*$=\sqrt{3}$*c*sin*B*，得2*a*sin*C*$=\sqrt{3}$*b*sin*C*，故2*a*$=\sqrt{3}$*b*，∵*b*$=4\sqrt{3}$，∴*a*＝6；

又*C*＝120°，△*ABC*的面积*S*$=\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}×6×4\sqrt{3}×\frac{\sqrt{3}}{2}=$18，

故△*ABC*的面积*S*为18．

（2）由2*a*$=\sqrt{3}b$，*b*：*c*＝2：3，∴$\left\{\begin{matrix}a=\frac{\sqrt{3}}{2}b\\c=\frac{3}{2}b\end{matrix}\right.$，∴$\left\{\begin{matrix}sinA=\frac{\sqrt{3}}{2}sinB\\sinC=\frac{3}{2}sinB\end{matrix}\right.$，

$\frac{\sqrt{3}sin2A-sinB}{sinC}=\frac{2\sqrt{3}sinAcosA-sinB}{sinC}=\frac{2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}sinBcosA-sinB}{\frac{3}{2}sinB}=$2cos*A*$-\frac{2}{3}$；

$cosA=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}=\frac{b^{2}+(\frac{3}{2}b)^{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^{2}}{2b\frac{3}{2}b}=\frac{5}{6}$；

∴2cos*A*$-\frac{2}{3}=$1．

故$\frac{\sqrt{3}sin2A-sinB}{sinC}=1$．

25．某观测站*C*在城*A*的南偏西20°的方向，由城*A*出发的一条公路，走向是南偏东40°，在*C*处测得公路上*B*处有一人，距*C*为31千米，正沿公路向*A*城走去，走了20千米后到达*D*处，此时*CD*间的距离为21千米，问：这人还要走多少千米才能到达*A*城？



【解答】解：在△*BCD*中，由余弦定理得cos*B*$=\frac{BC^{2}+BD^{2}-CD^{2}}{2BC⋅BD}=\frac{23}{31}$，

∴sin*B*$=\sqrt{1-cos^{2}B}=\frac{12\sqrt{3}}{31}$，

∴sin∠*ACB*＝sin（60°+*B*）$=\frac{35\sqrt{3}}{62}$．

在△*ABC*中，由正弦定理得：$\frac{AB}{sin∠ACB}=\frac{BC}{sin∠CAB}$，

即$\frac{AB}{\frac{35\sqrt{3}}{62}}=\frac{31}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得*AB*＝35，

∴*AD*＝*AB*﹣*BD*＝15千米．

∴这人还要走15千米才能到达*A*城．

26．在一个特定时段内，以点*E*为中心的7海里以内海域被设为警戒水域．点*E*正北55海里处有一个雷达观测站*A*．某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点*A*北偏东45°且与点*A*相距40$\sqrt{2}$海里的位置*B*，经过40分钟又测得该船已行驶到点*A*北偏东45°+θ（其中cosθ$=\frac{5\sqrt{26}}{26}$，0°＜θ＜90°）且与点*A*相距10$\sqrt{13}$海里的位置*C*．

（1）求该船的行驶速度（单位：海里/小时）；

（2）若该船不改变航行方向继续行驶，判断它是否会进入危险水域，并说明理由．



【解答】解：（1）如图，*AB*＝40$\sqrt{2}$，*AC*＝10$\sqrt{13}$，∠*BAC*＝θ，cosθ$=\frac{5\sqrt{26}}{26}$，

由余弦定理，*BC*2＝*AB*2+*AC*2﹣2*AB*•*AC*cosθ，

∴*BC*$=\sqrt{AB^{2}+AC^{2}-2AB⋅AC⋅cosθ}=$10$\sqrt{5}$，

∴该船的行驶速度为：$\frac{10\sqrt{5}}{\frac{2}{3}}=$15$\sqrt{5}$（海里/小时）．

（2）如图所示，设直线*AE*与*BC*的延长线相交于点*O*，

在△*ABC*中，由余弦定理，得cos*B*$=\frac{AB^{2}+BC^{2}-AC^{2}}{2AB⋅BC}$

$=\frac{40^{2}×2+10^{2}×5-10^{2}×13}{2×40\sqrt{2}×10\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

从而sin*B*$=\sqrt{1-cos^{2}B}=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

在△*ABQ*中，由正弦定理，得：

$AQ=\frac{ABsinB}{sin(45°-∠B)}=\frac{40\sqrt{2}×\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}×\frac{2\sqrt{10}}{10}}=$40，

∴*AE*＝55＞40＝*AQ*，且*QE*＝*AE*﹣*AQ*＝15，

过点*E*作*EP*⊥*BC*于点*P*，

在Rt△*QPE*中，*PE*＝*QE*•sin∠*PQE*＝*QE*•sin∠*AQC*＝*QE*•sin（45°﹣∠*B*）

＝15$×\frac{\sqrt{5}}{5}=$3$\sqrt{5}＜7$，

∴船会进入危险水域．

