1. 三角函数的积化和差公式









2. 三角函数的和差化积公式









**3.半角公式**

①；

②；

③

注：根据角所在的象限，判断符号：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 第一象限 | 第一、三象限 | ＋、－ | ＋、－ | ＋ |
| 第二象限 | 第一、三象限 | ＋、－ | ＋、－ | ＋ |
| 第三象限 | 第二、四象限 | ＋、－ | －、＋ | － |
| 第四象限 | 第二、四象限 | ＋、－ | －、＋ | － |

**4.辅助角公式**

1）. 辅助角公式：；

2）. 辅助角公式推导：

，

令，

则，

其中角所在象限由的符号确定，角的值由共同确定.

3）. 常见辅助角公式结论：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）；

（5）；

（6）.

1．2cos50°$-\frac{1}{2tan50°}=$（　　）

A．1 B．$\frac{1}{2}$ C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】解：2cos50°$-\frac{1}{2tan50°}$

$=\frac{4sin50°cos50°-cos50°}{2sin50°}$

$=\frac{2sin100°-sin40°}{2sin50°}$

$=\frac{2cos10°-\frac{1}{2}cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}sin10°}{2sin50°}$

$=\frac{\frac{3}{2}cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}sin10°}{2sin50°}$

$=\frac{\sqrt{3}sin50°}{2sin50°}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：*C*．

2．已知α∈（0，2π），且1+cosα＝4sinα，则sin$\frac{α}{2}=$（　　）

A．$\frac{1}{17}$ B．$\frac{\sqrt{17}}{17}$ C．$\frac{1}{17}$或1 D．$\frac{\sqrt{17}}{17}$或1

【解答】解：∵α∈（0，2π），

∴可得$\frac{α}{2}$∈（0，π），sin$\frac{α}{2}＞$0，

∵1+cosα＝4sinα，

∴2cos2$\frac{α}{2}=$8sin$\frac{α}{2}$cos$\frac{α}{2}$，

∴当cos$\frac{α}{2}=$0时，可得sin$\frac{α}{2}=$1；

当cos$\frac{α}{2}\ne $0时，可得cos$\frac{α}{2}=$4sin$\frac{α}{2}$，可得sin2$\frac{α}{2}+$cos2$\frac{α}{2}=$sin2$\frac{α}{2}+$（4sin$\frac{α}{2}$）2＝17sin2$\frac{α}{2}=$1，解得sin$\frac{α}{2}=\frac{\sqrt{17}}{17}$；

综上，sin$\frac{α}{2}=$1，或$\frac{\sqrt{17}}{17}$．

故选：*D*．

3．若cosα（1$+\sqrt{3}$tan10°）＝1，则α的一个可能值为（　　）

A．70° B．50° C．40° D．10°

【解答】解：∵$cosα(1+\sqrt{3}tan10°)=1$，

∴cosα$=\frac{1}{1+\sqrt{3}tan10°}$

$=\frac{cos10°}{cos10°+\sqrt{3}sin10°}$

$=\frac{cos10°}{2sin40°}$

$=\frac{sin80°}{2sin40°}$

＝cos40°，

∴α的一个可能值为40°．

故选：*C*．

4．$\frac{2cos48°-2\sqrt{3}sin36°cos36°}{cos27°-sin27°}=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$ B．1 C．﹣1 D．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】解：$\frac{2cos48°-2\sqrt{3}sin36°cos36°}{cos27°-sin27°}$

$=\frac{2cos(90°-42°)-\sqrt{3}sin72°}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}cos27°-\frac{\sqrt{2}}{2}sin27°)}$

$=\frac{2sin42°-\sqrt{3}sin72°}{\sqrt{2}cos(27°+45°)}$

$=\frac{2sin(72°-30°)-\sqrt{3}sin72°}{\sqrt{2}cos72°}$

$=\frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}sin72°-\frac{1}{2}cos72°)-\sqrt{3}sin72°}{\sqrt{2}cos72°}$

$=\frac{-cos72°}{\sqrt{2}cos72°}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故选：*D*．

5．若cos78°＝*m*，则sin（﹣51°）＝（　　）

A．$-\sqrt{\frac{m+1}{2}}$ B．$-\frac{\sqrt{1-m}}{2}$ C．$\sqrt{\frac{m+1}{2}}$ D．$\sqrt{\frac{1-m}{2}}$

【解答】解：∵cos78°＝*m*，

∴cos（180°﹣78°）＝cos102°＝﹣cos78°＝﹣*m*，可得1﹣2sin251°＝cos102°＝﹣*m*，

∴sin251°$=\frac{1+m}{2}$，解得：sin51°$=\sqrt{\frac{1+m}{2}}$，

∴sin（﹣51°）$=-\sqrt{\frac{1+m}{2}}$．

故选：*A*．

6已知2+5cos2α＝cosα，$cos(2α+β)=\frac{4}{5}$，$α\in (0，\frac{π}{2})$，$β\in (\frac{3π}{2}，2π)$，则cosβ的值为（　　）

A．$-\frac{4}{5}$ B．$\frac{44}{125}$ C．$-\frac{44}{125}$ D．$\frac{4}{5}$

【解答】解：因为2+5cos2α＝2+5（2cos2α﹣1）＝cosα，

整理可得：10cos2α﹣cosα﹣3＝0，

解得cosα$=\frac{3}{5}$，或$-\frac{1}{2}$，

又因为$α\in (0，\frac{π}{2})$，

所以cosα$=\frac{3}{5}$，可得sinα$=\frac{4}{5}$，

∴$\frac{π}{4}＜$α$＜\frac{π}{3}$，

可得cos2α＝2cos2α﹣1$=-\frac{7}{25}$，sin2α＝2sinαcosα$=\frac{24}{25}$，

因为$cos(2α+β)=\frac{4}{5}$，$β\in (\frac{3π}{2}，2π)$，

所以2α+β∈（2π，2π$+\frac{2π}{3}$），

故sin（2α+β）$=\frac{3}{5}$，

所以cosβ＝cos[（2α+β）﹣2α]＝cos（2α+β）cos2α+sin（2α+β）sin2α$=\frac{4}{5}×$（$-\frac{7}{25}$）$+\frac{24}{25}×\frac{3}{5}=\frac{44}{125}$．

故选：*B*．

7．已知*s*$in2α=\frac{2}{3}$，则$tanα+\frac{1}{tanα}=$（　　）

A．$\sqrt{3}$ B．$\sqrt{2}$ C．3 D．2

【分析】由二倍角化简，sin2α＝2sinαcosα，可得$\frac{2sinαcosα}{sin^{2}α+cos^{2}α}=\frac{2}{3}$，弦化切，即可求解．

【解答】解：由sin2α＝2sinαcosα，

可得$\frac{2sinαcosα}{sin^{2}α+cos^{2}α}=\frac{2}{3}$，

∴$\frac{2tanα}{tan^{2}α+1}=\frac{2}{3}$，

即tan2α﹣3tanα+1＝0．

可得$tanα+\frac{1}{tanα}=3$．

故选：*C*．

8． 若2sin（α$-\frac{π}{3}$）＝3sinα$-\sqrt{7}$，则tan2α＝（　　）

A．$-4\sqrt{3}$ B．$4\sqrt{3}$ C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D．$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解答】解：∵2sin（α$-\frac{π}{3}$）＝sinα$-\sqrt{3}$cosα＝3sinα$-\sqrt{7}$，

即 2sinα$+\sqrt{3}$cosα$=\sqrt{7}$，即 $\sqrt{7}$（$\frac{2}{\sqrt{7}}$sinα$+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$cosα ）$=\sqrt{7}$，

即sin（α+θ）＝1，其中，cosθ$=\frac{2}{\sqrt{7}}$，sinθ$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，

∴α+θ＝2*k*π$+\frac{π}{2}$，*k*∈**Z**，∴α＝2*k*π$+\frac{π}{2}-$θ，*k*∈**Z**，

∴sinα＝sin（2*k*π$+\frac{π}{2}-$θ）＝cosθ$=\frac{2}{\sqrt{7}}$，cosα＝cos（2*k*π$+\frac{π}{2}-$θ）＝sinθ$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，

则tanα$=\frac{sinα}{cosα}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，∴tan2α$=\frac{2tanα}{1-tan^{2}α}=-$4$\sqrt{3}$，

故选：*A*．

9．下列各式与tanα相等的是（　　）

A．$\sqrt{\frac{1-cos2α}{1+cosα}}$ B．$\frac{sin2α}{1+cos2α}$

C．$\frac{sinα}{1-cos2α}$ D．$\frac{1-cos2α}{sin2α}$

【解答】解：对于*A*，$\sqrt{\frac{1-cos2α}{1+cosα}}=\sqrt{\frac{1-(2cos^{2}α-1)}{1+cosα}}=\sqrt{\frac{2-2cos^{2}α}{1+cosα}}=\sqrt{2(1-cosα)}$，

对于*B*，$\frac{sin2α}{1+cos2α}=\frac{2sinαcosα}{2cos^{2}α}=\frac{sinα}{cosα}=$tanα，

对于*C*，$\frac{sinα}{1-cos2α}=\frac{sinα}{1-(1-2sin^{2}α)}=\frac{sinα}{-2sin^{2}α}=-\frac{1}{2sinα}$，

对于*D*，$\frac{1-cos2α}{sin2α}=\frac{1-(1-2sin^{2}α)}{2sinαcosα}=\frac{sinα}{cosα}=$tanα．

故选：*BD*．

10．已知cosα$=\frac{3}{5}$，则$\frac{1+\sqrt{2}cos(2α-\frac{π}{4})}{sin(α+\frac{π}{2})}$等于（　　）

A．$\frac{2}{5}$ B．$\frac{7}{5}$ C．$\frac{14}{5}$ D．$-\frac{2}{5}$

【解答】解：由cosα$=\frac{3}{5}$得$sinα=\pm \frac{4}{5}$．

$\frac{1+\sqrt{2}cos(2α-\frac{π}{4})}{sin(α+\frac{π}{2})}=\frac{1+\sqrt{2}(cos2αcos\frac{π}{4}+sin2αsin\frac{π}{4})}{cosα}$

$=\frac{1+cos2α+sin2α}{cosα}=\frac{2cos^{2}α+2sinαcosα}{cosα}$

＝2（sinα+cosα）

当$sinα=\frac{4}{5}时，原式=\frac{14}{5}$；当$sinα=-\frac{4}{5}时，原式=-\frac{2}{5}$．

故选：*CD*．

11．tan$\frac{α}{2}=$（　　）

A．$\frac{sinα}{1+cosα}$ B．$\frac{sinα}{1-cosα}$ C．$\frac{1-cosα}{sinα}$ D．$\frac{1+cosα}{sinα}$

【解答】解：因为$\frac{sinα}{1+cosα}=\frac{2sin\frac{1}{2}αcos\frac{1}{2}α}{2cos^{2}\frac{1}{2}α}=\frac{sin\frac{1}{2}α}{cos\frac{1}{2}α}=$tan$\frac{1}{2}α$，*A* 正确；

∵sin2α＝1﹣cos2α

∴$\frac{1-cosα}{sinα}=\frac{sinα}{1+cosα}=$tan$\frac{1}{2}α$，*C*正确；

故选：*AC*．

12.已知实数*a*，*b*，满足$\frac{a^{2}}{8}+\frac{b^{2}}{2}=1$，当$\sqrt{a}cosθ+\sqrt{2b}sinθ$取最大值时，tanθ＝（　　）

A．$\frac{1}{2}$ B．1 C．$\sqrt{2}$ D．2

【解答】解：由$\frac{a^{2}}{8}+\frac{b^{2}}{2}=1$得*a*2+4*b*2＝8，

利用辅助角公式可得：

$\sqrt{a}cosθ+\sqrt{2b}sinθ=\sqrt{a+2b}$sin（θ+φ）$\leq \sqrt{a+2b}\leq \sqrt{2\sqrt{\frac{a^{2}+4b^{2}}{2}}}=$2，其中tanφ$=\sqrt{\frac{a}{2b}}$，

所以最大值为2，当且仅当*a*＝2*b*＝2时成立，

所以$\sqrt{a}cosθ+\sqrt{2b}sinθ=$2sin（θ$+\frac{π}{4}$），

则θ$=\frac{π}{4}+$2*k*π，*k*∈**Z**，则tanθ＝1，

故选：*B*．

13．已知tan（$α-\frac{π}{4}$）＝2，则sin（2$α-\frac{π}{4}$）的值等于　$\frac{\sqrt{2}}{10}$　．

【解答】解：由tan（$α-\frac{π}{4}$）＝2，得$\frac{tanα-tan\frac{π}{4}}{1+tanαtan\frac{π}{4}}=2$，即$\frac{tanα-1}{1+tanα}=2$，解得tanα＝﹣3．

∴sin（2$α-\frac{π}{4}$）＝sin2αcos$\frac{π}{4}-$cos2αsin$\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(2sinαcosα+sin^{2}α-cos^{2}α)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}×\frac{2sinαcosα+sin^{2}α-cos^{2}α}{sin^{2}α+cos^{2}α}=\frac{\sqrt{2}}{2}×\frac{2tanα+tan^{2}α-1}{tan^{2}α+1}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}×\frac{-6+9-1}{9+1}=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{10}$．

14．$\frac{sin15°+\sqrt{2}sin30°}{cos15°}=$　1　．

【解答】解：$\frac{sin15°+\sqrt{2}sin30°}{cos15°}=\frac{sin15°+\sqrt{2}sin(45°-15°)}{cos15°}$

$=\frac{sin15°+cos15°-sin15°}{cos15°}=1$．

故答案为：1．

15．已知$θ\in [0，\frac{π}{4}]$，且$cos4θ=-\frac{1}{3}$，则$sin^{4}(θ+\frac{π}{4})-sin^{4}(θ-\frac{π}{4})=$　$\frac{\sqrt{6}}{3}$　．

【解答】解：∵sin（θ$+\frac{π}{4}$）＝sin[$\frac{π}{2}+$（θ$-\frac{π}{4}$）]＝cos（θ$-\frac{π}{4}$），

∴$sin^{4}(θ+\frac{π}{4})-sin^{4}(θ-\frac{π}{4})=$cos4（θ$-\frac{π}{4}$）﹣sin4（θ$-\frac{π}{4}$）＝[cos2（θ$-\frac{π}{4}$）+sin2（θ$-\frac{π}{4}$）][cos2（θ$-\frac{π}{4}$）﹣sin2（θ$-\frac{π}{4}$）]

＝cos2（θ$-\frac{π}{4}$）＝cos（2θ$-\frac{π}{2}$）＝cos（$\frac{π}{2}-$2θ）＝sin2θ，

∵$θ\in [0，\frac{π}{4}]$，且$cos4θ=-\frac{1}{3}$，

∴4θ∈[0，π]，

则4θ∈[$\frac{π}{2}$，π]，

即2θ∈[$\frac{π}{4}$，$\frac{π}{2}$]，

由$cos4θ=-\frac{1}{3}=$1﹣2sin22θ，

得sin22θ$=\frac{2}{3}$，则sin2θ$=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$．

16．设*a*、*b*是非零实数，*x*∈**R**，若$\frac{sin^{4}x}{a^{2}}+\frac{cos^{4}x}{b^{2}}=\frac{1}{a^{2}+b^{2}}$，则$\frac{sin^{2016}x}{a^{2014}}+\frac{cos^{2016}x}{b^{2014}}=$　$\frac{1}{(a^{2}+b^{2})^{1007}}$　．

【解答】解：∵$\frac{sin^{4}x}{a^{2}}+\frac{cos^{4}x}{b^{2}}=\frac{1}{a^{2}+b^{2}}$，

∴（*a*2+*b*2）（$\frac{sin^{4}x}{a^{2}}+\frac{cos^{4}x}{b^{2}}$）＝1，

即sin4*x*+cos4*x*$+\frac{b^{2}sin^{4}x}{a^{2}}+\frac{a^{2}cos^{4}x}{b^{2}}=$（sin2*x*+cos2*x*）2，

即$\frac{b^{2}sin^{4}x}{a^{2}}+\frac{a^{2}cos^{4}x}{b^{2}}-$2sin2*x*cos2*x*＝0，

即（$\frac{bsin^{2}x}{a}-\frac{acos^{2}x}{b}$）2＝0，

即$\frac{bsin^{2}x}{a}=\frac{acos^{2}x}{b}$，

即$\frac{sin^{2}x}{a^{2}}=\frac{cos^{2}x}{b^{2}}$，

则$\frac{sin^{4}x}{a^{2}}+\frac{cos^{4}x}{b^{2}}=\frac{sin^{2}x}{a^{2}}$（sin2*x*+cos2*x*）$=\frac{sin^{2}x}{a^{2}}=\frac{1}{a^{2}+b^{2}}=\frac{cos^{2}x}{b^{2}}$，

即$\frac{sin^{2016}x}{a^{2014}}+\frac{cos^{2016}x}{b^{2014}}=\frac{sin^{2014}x}{a^{2014}}$（sin2*x*+cos2*x*）$=\frac{sin^{2014}x}{a^{2014}}=$[（$\frac{sin^{2}x}{a^{2}}$）1007]＝（$\frac{1}{a^{2}+b^{2}}$）1007$=\frac{1}{(a^{2}+b^{2})^{1007}}$，

故答案为：$\frac{1}{(a^{2}+b^{2})^{1007}}$

17．计算：

（1）tan75°；

（2）$(\frac{1}{sin10°}-2sin10°)(1-\sqrt{3}tan20°)$．

【解答】解：（1）$tan75°=tan(30°+45°)=\frac{tan30°+tan45°}{1-tan30°tan45°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}+2$．

（2）$(\frac{1}{sin10°}-2sin10°)(1-\sqrt{3}tan20°)=\frac{1-2sin^{2}10°}{sin10°}$（1$-\sqrt{3}\frac{sin20°}{cos20°}$）$=\frac{cos20°}{sin10°}$（$\frac{cos20°-\sqrt{3}sin20°}{cos20°}$）$=\frac{2cos(20°+60°)}{sin10°}=\frac{2cos80°}{sin10°}=\frac{2sin10°}{sin10°}=$2．

18．已知$2sinα=2sin^{2}\frac{α}{2}-1$．

（1）求sinαcosα+cos2α的值；

（2）已知α∈（0，π），$β\in (0，\frac{π}{2})$，且tan2β﹣6tanβ＝1，求α+2β的值．

【解答】解：（1）由已知可得2sinα＝﹣cosα，则tanα$=-\frac{1}{2}$，

所以sinαcosα+cos2α$=\frac{sinαcosα+cos2α}{sin^{2}α+cos^{2}α}=\frac{tanα+1-tan^{2}α}{tan^{2}α+1}=\frac{1}{5}$；

（2）由tan2β﹣6tanβ＝1，可得tan2β$=\frac{2tanβ}{1-tan^{2}β}=-\frac{1}{3}$，

则tan（α+2β）$=\frac{tanα+tan2β}{1-tanαtan2β}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}×\frac{1}{3}}=-$1，

因为$β\in (0，\frac{π}{2})$，所以2β∈（0，π），又tan2β$=-\frac{1}{3}＞-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则2$β\in (\frac{5π}{6}，π)$，

因为α∈（0，π），tan$α=-\frac{1}{2}＞-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$α\in (\frac{5π}{6}，π)$，

则$α+2β\in (\frac{5π}{3}，2π)$，

所以$α+2β=\frac{7π}{4}$．

19.已知函数*f*（*x*）＝sin4*x*+2sin*x*cos*x*﹣cos4*x*．

（1）求*f*（*x*）的最大值及取得最大值时相应的自变量*x*的取值集合．

（2）若函数*g*（*x*）＝*f*（ω*x*）在区间[0，π]内恰有四个不同的零点*x*1，*x*2，*x*3，*x*4．

①求实数ω的取值范围；

②当|*x*1﹣*x*2|＝|*x*3﹣*x*4|$=\frac{π}{2}$时，求实数ω的值及相应的四个零点．

【解答】解：（1）函数*f*（*x*）＝sin4*x*+2sin*x*cos*x*﹣cos4*x*

＝sin2*x*﹣cos2*x*+sin2*x*

＝sin2*x*﹣cos2*x*

$=\sqrt{2}$sin（2*x*$-\frac{π}{4}$），

当2*x*$-\frac{π}{4}=$2*k*π$+\frac{π}{2}$，即*x*＝*k*π$+\frac{3π}{8}$（*k*∈**Z**）时，*f*（*x*）取得最大值为$\sqrt{2}$；

此时*x*的取值范围是{*x*|*x*＝*k*π$+\frac{3π}{8}$，*k*∈**Z**}．

（2）函数*g*（*x*）＝*f*（ω*x*）$=\sqrt{2}$sin（2ω*x*$-\frac{π}{4}$），

①函数*g*（*x*）在区间[0，π]内恰有四个不同的零点的充分必要条件为$\left\{\begin{matrix}g(0)\leq 0，\\\frac{13π}{8ω}\leq π，\\\frac{17π}{8ω}＞π，\end{matrix}\right.$

即$\left\{\begin{matrix}\sqrt{2}sin(-\frac{π}{4})\leq 0\\ω\geq \frac{13}{8}\\ω＜\frac{17}{8}\end{matrix}\right.$，解得$\frac{13}{8}\leq $ω$＜\frac{17}{8}$；

②|*x*1﹣*x*2|＝|*x*3﹣*x*4|$=\frac{4π}{8ω}$或$\frac{8π}{8ω}$；

若$\frac{4π}{8ω}=\frac{π}{2}$，解得ω＝1，此时$g(x)=\sqrt{2}sin(2x-\frac{π}{4})$在区间[0，π]内只有两个零点，不符合题意，舍去；

若$\frac{8π}{8ω}=\frac{π}{2}$，解得ω＝2，此时$g(x)=\sqrt{2}sin(4x-\frac{π}{4})$在区间[0，π]内恰有四个零点，它们分别是$\frac{π}{16}$、$\frac{5π}{16}$、$\frac{9π}{16}$、$\frac{13π}{16}$；

综上所述，ω＝2，相应的四个零点分别是$\frac{π}{16}$、$\frac{5π}{16}$、$\frac{9π}{16}$、$\frac{13π}{16}$．

20．已知α∈（0，π），且$sin(\frac{7π}{2}-α)+cos(\frac{5π}{2}+α)=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

（1）求$cosα\sqrt{\frac{1+sinα}{1-sinα}}+sinα\sqrt{\frac{1+cosα}{1-cosα}}$的值；

（2）求$\frac{sin^{3}α-5cosα}{4sinα+2cos^{3}α}$值．

【解答】解：（1）∵α∈（0，π），且$sin(\frac{7π}{2}-α)+cos(\frac{5π}{2}+α)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴可得：﹣cosα﹣sinα$=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即cosα+sinα$=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，两边平方可得：1+2cosαsinα$=\frac{1}{5}$，可得2cosαsinα$=-\frac{4}{5}$，

∴α为钝角，cosα＜0，

∴$cosα\sqrt{\frac{1+sinα}{1-sinα}}+sinα\sqrt{\frac{1+cosα}{1-cosα}}=$cosα$\sqrt{\frac{(1+sinα)^{2}}{cos^{2}α}}+$sinα$\sqrt{\frac{(1+cosα)^{2}}{sin^{2}α}}=-$（1+sinα）+1+cosα＝cosα﹣sinα$=-\sqrt{(cosα-sinα)^{2}}=-\sqrt{1-(-\frac{4}{5})}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$．

（2）∵由（1）可得：α∈（0，π），cosα+sinα$=-\frac{\sqrt{5}}{5}＜$0①，

∴α∈（$\frac{π}{2}$，π），

又∵cos2α+sin2α＝1，②

∴由①②解得cosα$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，sinα$=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴$\frac{sin^{3}α-5cosα}{4sinα+2cos^{3}α}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{25}+2\sqrt{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}-\frac{16\sqrt{5}}{25}}=\frac{51}{4}$．

21．已知α，β为锐角，tanα$=\frac{4}{3}$，cos（α+β）$=-\frac{\sqrt{5}}{5}$．

（1）求cos2α的值；

（2）求tan（α﹣β）的值．

【解答】解：（1）由$\left\{\begin{matrix}\frac{sinα}{cosα}=\frac{4}{3}\\sin^{2}α+cos^{2}α=1\\α为锐角\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}sinα=\frac{4}{5}\\cosα=\frac{3}{5}\end{matrix}\right.$，

∴cos2α$=cos^{2}α-sin^{2}α=-\frac{7}{25}$；

（2）由（1）得，sin2$α=2sinαcosα=\frac{24}{25}$，则tan2α$=\frac{sin2α}{cos2α}=-\frac{24}{7}$．

∵α，β∈（0，$\frac{π}{2}$），∴α+β∈（0，π），

∴sin（α+β）$=\sqrt{1-cos^{2}(α+β)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

则tan（α+β）$=\frac{sin(α+β)}{cos(α+β)}=-2$．

∴tan（α﹣β）＝tan[2α﹣（α+β）]$=\frac{tan2α-tan(α+β)}{1+tan2αtan(α+β)}=-\frac{2}{11}$．

22．设$cosα=-\frac{\sqrt{5}}{5}，tanβ=\frac{1}{3}$，$π＜α＜\frac{3π}{2}，0＜β＜\frac{π}{2}$．

（1）求sin（α﹣β）的值；

（2）求α﹣β的值．

【解答】解：（1）∵$π＜α＜\frac{3π}{2}，cosα=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，∴$sinα=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

又∵$0＜β＜\frac{π}{2}$，$tanβ=\frac{1}{3}$，

联立$\left\{\begin{matrix}\frac{sinβ}{cosβ}=\frac{1}{3}\\sin^{2}β+cos^{2}β=1\end{matrix}\right.$，解得$sinβ=\frac{\sqrt{10}}{10}，cosβ=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

∴sin（α﹣β）＝sinαcosβ﹣cosαsinβ$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}×\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}×\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）∵$0＜β＜\frac{π}{2}$，∴$-\frac{π}{2}＜-β＜0$，

又∵$π＜α＜\frac{3π}{2}$，∴$\frac{π}{2}＜α-β＜\frac{3π}{2}$，

而$sin(α-β)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$α-β=\frac{5π}{4}$．

23．已知$\frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}=$3

（1）求$\frac{2sinx-cosx}{sinx+2cosx}$的值；

（2）若*x*是第三象限的角，化简三角式$\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}-\sqrt{\frac{1-sinx}{1+sinx}}$，并求值．

【分析】（1）把已知等式左边分子分母同时除以cos*x*，化为含有tan*x*的方程得答案；

（2）由角*x*的范围，得到cos*x*＜0，把要化简的式子分母化为单项式，开放后化为含有tan*x*的代数式得答案．

【解答】解：（1）∵由$\frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}=$3，得cos*x*≠0，

则$\frac{tanx+1}{tanx-1}=$3，解得：tan*x*＝2；

∴$\frac{2sinx-cosx}{sinx+2cosx}=\frac{2tanx-1}{tanx+2}=\frac{2×2-1}{2+2}=\frac{3}{4}$．

（2）∵*x*是第三象限的角，

∴cos*x*＜0．

又tan*x*＝2．

∴$\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}-\sqrt{\frac{1-sinx}{1+sinx}}$

$=\sqrt{\frac{(1+sinx)^{2}}{(1+sinx)(1-sinx)}}-\sqrt{\frac{(1-sinx)^{2}}{(1+sinx)(1-sinx)}}$

$=\frac{1+sinx}{|cosx|}-\frac{1-sinx}{|cosx|}$

$=-\frac{1+sinx}{cosx}+\frac{1-sinx}{cosx}$

$=\frac{-1-sinx+1-sinx}{cosx}$

＝﹣2tan*x*

＝﹣4．

24．已知$tan(\frac{π}{4}-α)=\frac{1}{3}，α\in (0，\frac{π}{4})$．

（1）求$f(α)=\frac{sin2α-2cos^{2}α}{1+tanα}$的值；

（2）若$β\in (0，\frac{π}{2})$，且$sin(\frac{3π}{4}+β)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，求α+β的值．

【解答】解：（1）∵$tan(\frac{π}{4}-α)=\frac{1}{3}，α\in (0，\frac{π}{4})$，

∴$tanα=\frac{1}{2}$．

∴$f(α)=\frac{sin2α-2cos^{2}α}{1+tanα}=\frac{2sinα⋅cosα-2cos^{2}α}{(1+tanα)(cos^{2}α+sin^{2}α)}=\frac{2tanα-2}{(1+tanα)(1+tan^{2}α)}=-\frac{8}{15}$．…7

（2）∵$β\in (0，\frac{π}{2})$，且$sin(\frac{3π}{4}+β)=\frac{\sqrt{5}}{5}$∴$\frac{3π}{4}＜\frac{3π}{4}+β＜\frac{5π}{4}$

∴$cos(\frac{3π}{4}+β)=\frac{-2}{\sqrt{5}}$，

∴$sinβ=sin[(β+\frac{3π}{4})-\frac{3π}{4}]=sin(β+\frac{3π}{4})cos\frac{3π}{4}-cos(β+\frac{3π}{4})sin\frac{3π}{4}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

∴$cosβ=\frac{3}{\sqrt{10}}$．∴$tanβ=\frac{1}{3}$．

∴$tan(α+β)=\frac{tanα+tanβ}{1-tanα⋅tanβ}=1$，

又∵$α+β\in (0，\frac{3π}{4})$，

∴$α+β=\frac{π}{4}$． …14