**2020-2021学年高一上学期期末考试解答题压轴题专练（二）**

 班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_得分：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

一、解答题

1. 已知函数$f( x) =|x- a|$．
$(1)$当$a =$ $-1$时，求不等式$f( x)\leq |2x+$ $1| -1$的解集；
$(2)$若函数$g(x)=f(x)-|x+ 3|$的值域为*A*，且$[-2,1] ⊆ A$，求*a*的取值范围．

【答案】解：$(1)$当$a=-1$时，$f(x)=|x+1|$，
$①$当$x\leq -1$时，原不等式可化为$-x-1\leq -2x-2$，解得$x\leq -1$，
$②$当$-1<x<-\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$x+1\leq -2x-2$，
解得$x\leq -1$，此时原不等式无解，
$③$当$x\geq -\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$x+1\leq 2x$，解得$x\geq 1$，
综上可知，原不等式的解集为$\{x|x\leq -1$或$x\geq 1\}$；
$(2)①$当$a<-3$时，
$g(x)=\left\{\begin{matrix}3+a,x⩽a\\2x-a+3,a<x<-3\\-a-3,x⩾-3\end{matrix}\right.,$
所以函数$g(x)$的值域$A=\{x|3+a\leq x\leq -a-3\}$，
因为$[-2,1] ⊆ A$，
所以$\left\{\begin{matrix}a+3\leq -2\\-a-3\geq 1\end{matrix}\right.,$
解得$a\leq -5$；
$②$当$a\geq -3$时，
$g(x)=\left\{\begin{matrix}3+a,x⩽-3\\-2x+a-3,-3<x<a\\-a-3,x\geq a\end{matrix}\right.,$
所以函数$g(x)$的值域$A=\{x|-a-3\leq x\leq 3+a\}$，
因为$[-2,1]⊆A$，
所以$\left\{\begin{matrix}-a-3⩽-2\\3+a⩾1\end{matrix}\right.$，解得$a\geq -1$，
综上可知，*a*的取值范围是$(-\infty ,-5]∪[-1,+\infty ).$

【解析】本题考查了绝对值不等式，不等式求解，函数值域，集合关系的参数问题，考查了分类讨论思想，属于中档题．
$(1)$根据当$a=-1$时，$f(x)=|x+1|$，然后用零点分段法分段解不等式，最后综合即可求解；
$(2)$分为$a<-3$，$a\geq -3$两种情况，分别将$g(x)$化为分段函数，求出$g(x)$值域*A*，然后结合$[-2,1] ⊆ A$，建立关于*a*的不等式求解即可．

1. 已知函数$f\_{a}(x)=\left|x\right|+\left|x-a\right|$，其中$a\in R$．
$(1)$判断函数$y=f\_{a}(x)$的奇偶性，并说明理由；
$(2)$记点$P(x\_{0},y\_{0})$，求证：存在实数*a*，使得点*P*在函数$y=f\_{a}(x)$图像上的充要条件是$y\_{0}\geq \left|x\_{0}\right|$；
$(3)$对于给定的非负实数*a*，求最小的实数$l(a)$，使得关于*x*的不等式$f\_{a}(x+1)\geq f\_{a}(x)$对一切$x\in \left[l(a)\right.,\left.+\infty \right)$恒成立．

【答案】解：$(1)$函数$y=f\_{a}(x)$的定义域为*R*   ，
   当$a=0$时，$f\_{a}(x)=2\left|x\right|$为偶函数；
当$a\ne 0$时，由$f(a)=\left|a\right|$，$f(-a)=3\left|a\right|$，得$f(-a)\ne f(a)$，且$f(-a)\ne -f(a)$， $f\_{a}(x)=\left|x\right|+\left|x-a\right|$为非奇非偶函数$;$

$(2)$证明：充分性：已知$y\_{0}⩾|x\_{0}|$，取$a\_{0}=x\_{0}+y\_{0}-|x\_{0}|$，

则$f\_{a\_{0}}(x\_{0})=|x\_{0}|+|x\_{0}-a\_{0}|=|x\_{0}|+|x\_{0}-(x\_{0}+y\_{0}-|x\_{0}|)|=|x\_{0}|+|y-|x\_{0}||$

$=|x\_{0}|+y\_{0}-|x\_{0}|=y\_{0}$，

 所以点*P*在函数$y=f\_{a\_{0}}(x)$图像上，

 必要性：已知存在实数*a*，使得点*P*在函数$y=f\_{a}(x)$图像上，

则$y\_{0}=f\_{a}(x\_{0})=|x\_{0}|+|x\_{0}-a|⩾|x\_{0}|$      $;$

$(3)$由于$a\geq 0$可知：$f\_{a}(x)=\left\{\begin{matrix}2x-a&x\geq a\\&\begin{matrix}&a\\&a-2x\end{matrix}\&\begin{matrix}&0\leq x<a\\&x<0\end{matrix}\end{matrix}\right.$具有如下两个性质：
$1)$对任意$0\leq x\_{1}<x\_{2}$，均有$f\_{a}(x\_{1})\leq f\_{a}(x\_{2})$；
$2)$对任意负实数$x\_{0}$，不等式$f\_{a}(x)<f\_{a}(x\_{0})$的解集为$(x\_{0},a-x\_{0})$，

$①$当$a\geq 1$时，$l(a)$的最小值为0，理由如下：

若$l(a)<0$，取$x\_{0}=l(a)$，$x\_{0}<x\_{0}+1=l(a)+1\leq a<a-x\_{0}$，

由性质$2)$可知，$f\_{a}(x\_{0})>f\_{a}(x\_{0}+1)$，即$l(a)<0$不满足，

由性质$1)$可知，$l(a)=0$满足，
$②$当$0\leq a<1$时，$l(a)$的最小值为$\frac{a-1}{2}$，理由如下：
若$l(a)<\frac{a-1}{2}$，取$x\_{0}=l(a)$，$x\_{0}<x\_{0}+1=l(a)+1\leq a-l(a)=a-x\_{0}$，
由性质$2)$可知，$f\_{a}(x\_{0})>f\_{a}(x\_{0}+1)$，即$l(a)<\frac{a-1}{2}$不满足，

若$l(a)=\frac{a-1}{2}$，当$x\geq 0$时，由性质$1)$可知：$f\_{a}(x+1)\geq f\_{a}(x)$，

当$\frac{a-1}{2}⩽x<0$时，$x+1>a-x$，由性质$2)f\_{a}(x+1)\geq f\_{a}(x)$，

所以$f\_{a}(x+1)\geq f\_{a}(x)$对任意恒成立，即$l(a)=\frac{a-1}{2}$满足，

综上：$(l(a))\_{min}=\left\{\begin{matrix}0,a⩾1\\\frac{a-1}{2},0⩽a<1\end{matrix}\right..$

【解析】本题主要考查函数的奇偶性，充分条件，必要条件的判断以及不等式恒成立问题，属于综合题．
$(1)$  当$a=0$，$a\ne 0$时分别判断函数的奇偶性$;$
$(2)$充分性：已知$y\_{0}⩾|x\_{0}|$，取$a\_{0}=x\_{0}+y\_{0}-|x\_{0}|$，得出$f\_{a\_{0}}\left(x\_{0}\right)=y\_{0}$， 所以点*P*在函$y=f\_{a\_{0}}(x)$图像上，必要性：已知存在实数*a*，使得点*P*在函数$y=f\_{a}(x)$图像上，则$y\_{0}=f\_{a}(x\_{0})=|x\_{0}|+|x\_{0}-a|⩾|x\_{0}|;$
$(3)$关于*x*的不等式$f\_{a}(x+1)\geq f\_{a}(x)$对一切$x\in \left[l(a)\right.,\left.+\infty \right)$恒成立$.$由于$a\geq 0$可知：$f\_{a}(x)=\left\{\begin{matrix}2x-a&x\geq a\\&\begin{matrix}&a\\&a-2x\end{matrix}\&\begin{matrix}&0\leq x<a\\&x<0\end{matrix}\end{matrix}\right.$具有如下两个性质：
$1)$对任意$0\leq x\_{1}<x\_{2}$，均有$f\_{a}(x\_{1})\leq f\_{a}(x\_{2})$；
$2)$对任意负实数$x\_{0}$，不等式$f\_{a}(x)<f\_{a}(x\_{0})$的解集为$(x\_{0},a-x\_{0})$，

$①$当$a\geq 1$时，  $②$当$0\leq a<1$时，分别求$l(a)$的最小值，最终综合得出结果．

1. 已知函数$f\left(x\right)=\left|2x-1\right|+\left|2x+3\right|.$
$⑴$解不等式$f\left(x\right)\geq 6;$
$⑵$记$f\left(x\right)$的最小值是*m*，正实数$a,b$满足$2ab+a+2b=m$，求$a+2b$的最小值．

【答案】解：$(1)∵f(x)=|2x-1|+|2x+3|=\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}4x+2,x\geq \frac{1}{2}\\4,-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\\-4x-2,x\leq -\frac{3}{2}\end{matrix}\end{matrix}\right.$，

$∵f(x)\geq 6$，

$∴\left\{\begin{matrix}x\geq \frac{1}{2}\\4x+2\geq 6\end{matrix}\right.$或$\left\{\begin{matrix}x\leq -\frac{3}{2}\\-4x-2\geq 6\end{matrix}\right.$，

解得$x\geq 1$或$x\leq -2$，

$∴$不等式$f\left(x\right)\geq 2$的解集为$\{x|x\geq 1$或$x\leq -2\}$．

$(2)∵f\left(x\right)=\left|2x-1\right|+\left|2x+3\right|\geq 4$，

$∴$函数$f\left(x\right)$的最小值为$m=4$，

$∵a,b>0$，

$∴2ab+a+2b=4$，

$∴4=2ab+a+2b\leq (\frac{a+2b}{2})^{2}+(a+2b)$，

解得$(2a+b)\geq 2\sqrt{5}-2$，

当且仅当$a=2b$时等号成立，

故$a+2b$的最小值为$2\sqrt{5}-2$．

【解析】本题考查绝对值不等式的解法及基本不等式的应用，考查学生的计算能力和推理能力，属于中档题．

$(1)$用零点分区间讨论求解即可；

$(2)$利用绝对值不等式求得函数$f\left(x\right)$的最小值为$m=4$，再根据基本不等式求解即可．

1. 已知函数$f(x)=\frac{a⋅2^{x}+b+1}{2^{x}+1}$是定义域在*R*上的奇函数，且$f(2)=\frac{6}{5}$．
$(1)$求实数*a*、*b*的值；
$(2)$判断函数$f(x)$的单调性，并用定义证明；
$(3)$解不等式：$f[log \_{\frac{1}{2}}(2x-2)]+f[log\_{2}(1-\frac{1}{2}x)]\geq 0$．

【答案】解：$(1)$由题意可知$f(x)$定义域在*R*上的奇函数可得$f(0)=0$，$f(2)=\frac{6}{5}$，
即：$\left\{\begin{matrix}f(0)=\frac{a+b+1}{2}=0\\f(2)=\frac{4a+b+1}{5}=\frac{6}{5}\end{matrix}\right.$，解得：$\left\{\begin{matrix}a=2\\b=-3\end{matrix}\right.$，
即实数$a=2$、$b=-3;$
$(2)$由$(1)f(x)=\frac{2⋅2^{x}-2}{2^{x}+1}=2-\frac{4}{2^{x}+1}$，函数$f(x)$在*R*上为增函数，
证明：在*R*上任$x\_{1}$，$x\_{2}$，且$x\_{1}<x\_{2}$，
则$f(x\_{1})-f(x\_{2})=2-\frac{4}{2^{x\_{1}}+1}-(2-\frac{4}{2^{x\_{2}}+1})=\frac{4(2^{x\_{1}}-2^{x\_{2}})}{(2^{x\_{1}}+1)(2^{x\_{2}}+1)}$，
$∵x\_{1}<x\_{2}$，$∴0<2^{x\_{1}}<2^{x\_{2}}$，
$∴\frac{4(2^{x\_{1}}-2^{x\_{2}})}{(2^{x\_{1}}+1)(2^{x\_{2}}+1)}<0$，即$f(x\_{1})-f(x\_{2})<0$，
$∴$函数$f(x)$在*R*上为增函数；
$(3)$不等式$f[log \_{\frac{1}{2}}(2x-2)]+f[log\_{2}(1-\frac{1}{2}x)]\geq 0$，
等价转化为：$f[log \_{\frac{1}{2}}(2x-2)]\geq -f[log\_{2}(1-\frac{1}{2}x)]$，
$∵f(x)$定义域在*R*上的奇函数，
$∴f[log \_{\frac{1}{2}}(2x-2)]\geq f[log \_{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2}x)]$，
又$∵$函数$f(x)$是*R*上的增函数，
$∴log \_{\frac{1}{2}}(2x-2)\geq log \_{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2}x)$，
由$\left\{\begin{matrix}2x-2>0\\1-\frac{1}{2}x>0\\2x-2\leq 1-\frac{1}{2}x\end{matrix}\right.,$
解得：$\left\{\begin{matrix}x>1\\x<2\\x\leq \frac{6}{5}\end{matrix}\right.$，
$∴$原不等式的解集为$\{x|1<x\leq \frac{6}{5}\}.$

【解析】本题主要考查函数的奇偶性，单调性的证明及运用，对数的计算能力，属于中档题．
$(1)$根据$f(x)$定义域在*R*上的奇函数可得$f(0)=0$，$f(2)=\frac{6}{5}$即可求解实数*a*、*b*的值；
$(2)$利用定义证明单调性$;$
$(3)$利用函数的单调性和奇偶性即求解不等式．

1. 如果函数$f\left(x\right)$在定义域的某个区间$\left[m,n\right]$上的值域恰为$\left[m,n\right]$，则称函数$f\left(x\right)$为$\left[m,n\right]$上的等域函数，$\left[m,n\right]$称为函数$f\left(x\right)$的一个等域区间．

$(1)$若函数$f(x)=x^{2}$，$x\in R$，则函数$f\left(x\right)$存在等域区间吗？若存在，试写出其一个等域区间，若不存在，说明理由．

$(2)$已知函数$f(x)=a^{x}+(a-k)x+b$，其中$a>0$且$a\ne 1$，$k>0$，$b\in R$．

$(ⅰ)$当$a=k$时，若函数$f\left(x\right)$是$\left[0,1\right]$上的等域函数，求$f\left(x\right)$的解析式；

$(ⅱ)$证明：当$0<a<1$，$k\geq a+1$时，函数$f\left(x\right)$不存在等域区间．

【答案】解：$(1)$函数$f\left(x\right)=x^{2}$存在等域区间，如$\left[0,1\right]$；

$(2)$已知函数$f\left(x\right)=a^{x}+\left(a-k\right)x+b$，其中$a>0$且$a\ne 1$，$k>0$，$b\in R$．

$(ⅰ)$当$a=k$时，$f\left(x\right)=a^{x}+b$

若函数$f\left(x\right)$是$\left[0,1\right]$上的等域函数，

当$a>1$时，$f\left(x\right)$为$\left[0,1\right]$上的增函数，

则$\left\{\begin{matrix}f\left(0\right)=1+b=0\\f\left(1\right)=a+b=1\end{matrix}\right.$，得$\left\{\begin{matrix}a=2\\b=-1\end{matrix}\right.$，此时$f\left(x\right)=2^{x}-1$；

当$0<a<1$时，$f\left(x\right)$为$\left[0,1\right]$上的减函数，

则$\left\{\begin{matrix}f\left(0\right)=1+b=1\\f\left(1\right)=a+b=0\end{matrix}\right.$，得$\left\{\begin{matrix}a=0\\b=0\end{matrix}\right.$，不满足条件．

综上所述，$f\left(x\right)=2^{x}-1$；

$(ⅱ)$证明：当$0<a<1$，$k\geq a+1$时，$-k\leq -a-1$，即$a-k\leq -1<0$，

则$f\left(x\right)=a^{x}+\left(a-k\right)x+b$为*R*上的减函数，

假设函数存在等域区间$\left[m,n\right]$，$m<n$，

则$\left\{\begin{matrix}f\left(m\right)=a^{m}+\left(a-k\right)m+b=n\\f\left(n\right)=a^{n}+\left(a-k\right)n+b=m\end{matrix}\right.,$

两式作差得$a^{m}-a^{n}+\left(a-k\right)\left(m-n\right)=n-m$，

即$a^{m}-a^{n}=-(a-k)(m-n)+(n-m)$ $=(k-a-1)(m-n)$，

$∵0<a<1$，$k\geq a+1$，
$∴a^{m}-a^{n}>0$，$m-n<0$，$k-a-1\geq 0$，

则$\left(k-a-1\right)\left(m-n\right)<0$，

等式不成立，即函数$f\left(x\right)$不存在等域区间．

【解析】

本题考查函数的单调性，函数的解析式及函数的定义域与值域，考查新定义问题，属于中档题，
$(1)$函数$f\left(x\right)=x^{2}$存在等域区间，如$\left[0,1\right]$；
$(2)(i)$当$a>1$时，$\left\{\begin{matrix}f\left(0\right)=1+b=0\\f\left(1\right)=a+b=1\end{matrix}\right.$；当$0<a<1$时，$\left\{\begin{matrix}f\left(0\right)=1+b=1\\f\left(1\right)=a+b=0\end{matrix}\right.$，即可求解；
$(ⅱ)$假设函数存在等域区间$\left[m,n\right]$，则$\left\{\begin{matrix}f\left(m\right)=a^{m}+\left(a-k\right)m+b=n\\f\left(n\right)=a^{n}+\left(a-k\right)n+b=m\end{matrix}\right.$，得出等式不成立即可．

1. 已知函数$f(x)=\frac{a^{2x}-1}{a^{x}}(a>0,a\ne 1)$．
$(1)$若$f(1)<0$，对任意$x\in R$有$f\left(2x^{2}-kx-k\right)<\frac{1}{a}-a$恒成立，求实数*k*取值范围；

$(2)$设$g(x)=log\_{m}[a^{2x}+a^{-2x}-mf(x)]$，$(m>0,m\ne 1)$，若$f(1)=\frac{3}{2}$，问是否存在实数*m*使函数$g(x)$在$\left[1,log\_{2}3\right]$上的最大值为0？若存在，求出*m*的值；若不存在，说明理由．

【答案】解：$(1)$由$f(x)=\frac{a^{2x}-1}{a^{x}}=a^{x}-a^{-x}$，且$f(1)<0$可得$a-\frac{1}{a}<0$，
$∵a>0$，$∴a^{2}-1<0$，

解得$0<a<1$，

则$y=a^{x}$在$(-\infty ,+\infty )$上单调递减，$y=a^{-x}$在$(-\infty ,+\infty )$上单调递增，

$∴y=a^{x}-a^{-x}$在$(-\infty ,+\infty )$上单调递减，

$f(-1)=\frac{1}{a}-a$，由$f\left(2x^{2}-kx-k\right)<f(-1)$有对任意$x\in R,2x^{2}-kx-k>-1$，

所以$Δ=k^{2}-8(-k+1)<0$，

所以$-4-2\sqrt{6}<k<-4+2\sqrt{6}$．

$(2)g(x)=log\_{m}[a^{2x}+a^{-2x}-mf(x)]=log\_{m}[f^{2}(x)-mf(x)+2]$，
由$f(1)=\frac{3}{2}$可得$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$，

即$(a-2)(2a+1)=0$，又$a>0$，

$∴a=2$，$∴f(x)=2^{x}-2^{-x}$，

易知$f(x)$在$(-\infty ,+\infty )$单调递增．

令$t=f(x)=2^{x}-2^{-x}$，则$y=g(x)=log\_{m}\left(t^{2}-mt+2\right)$，

令$u=t^{2}-mt+2$，则$y=log\_{m}u$，

$∵x\in \left[1,log\_{2}3\right],f(1)=\frac{3}{2}$，$f\left(log\_{2}3\right)=2^{log\_{2}3}-2^{-log\_{2}3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$，

$∴t\in \left[\frac{3}{2},\frac{8}{3}\right]$，$∵g(x)$在$\left[1,log\_{2}3\right]$有意义，

$∴$对任意的$t\in \left[\frac{3}{2},\frac{8}{3}\right]$都有$u=t^{2}-mt+2>0$恒成立，

$∴mt<t^{2}+2$即$m<t+\frac{2}{t}=h(t)$，

$∴m<h(t)\_{min}=h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{6}$，

$∴m\in (0,1)⋃\left(1,\frac{17}{6}\right)$．

二次函数$u=t^{2}-mt+2$开口向上，对称轴为直线$t=\frac{m}{2}\in \left(0,\frac{1}{2}\right)⋃\left(\frac{1}{2},\frac{17}{12}\right)$，
对称轴在区间$\left[\frac{3}{2},\frac{8}{3}\right]$的左侧，

所以$u=t^{2}-mt+2$在区间$\left[\frac{3}{2},\frac{8}{3}\right]$上单调递增，

$t=\frac{3}{2}$时，$u\_{min}=-\frac{3}{2}m+\frac{17}{4},t=\frac{8}{3}$时，$u\_{max}=-\frac{8}{3}m+\frac{82}{9}$，

设存在满足条件的实数*m*则：

若$m\in (0,1)$，则$y=log\_{m}u$为减函数，$g(x)\_{max}=0⇔u\_{min}=1$，

即$-\frac{3}{2}m+\frac{17}{4}=1$，

所以$m=\frac{13}{6}\notin (0,1)$，舍去；
若$m\in \left(1,\frac{17}{6}\right)$，则$y=log\_{m}u$为增函数，

$g(x)\_{max}=0⇔u\_{max}=1$，

即$-\frac{8}{3}m+\frac{82}{9}=1$，

所以$m=\frac{73}{24}\notin \left(1,\frac{17}{6}\right)$，舍去；

综上，不存在满足条件的实数*m*．

【解析】本题考查函数的单调性，恒成立，最值问题，属于难题．
$(1)$由$f(1)<0$得$0<a<1$，$f\left(2x^{2}-kx-k\right)<\frac{1}{a}-a$恒成立等价于$2x^{2}-kx-k>-1$恒成立，由$Δ=k^{2}-8(-k+1)<0$即可求解；
$(2)$先求出$f(x)=2^{x}-2^{-x}$，令$t=f(x)=2^{x}-2^{-x}$，则$y=g(x)=log\_{m}\left(t^{2}-mt+2\right)$，再根据函数的最大值为零求解即可．

1. 在已知函数$f(x)=Asin(ωx+φ)$，$x\in R\left(其中A>0,ω>0,0<φ<\frac{π}{2}\right)$的图象与*x*轴的交点中，相邻两个交点之间的距离为$\frac{π}{2}$，且图象上一个最低点为$M\left(\frac{2π}{3},-2\right)$．

$(1)$求$f(x)$的解析式及$f(x)$的单调递减区间；

$(2)$当$x\in \left[\frac{π}{12},\frac{π}{2}\right]$时，求$f(x)$的值域．

【答案】解：$(1)$由题意知，$A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{π}{2}$，故$T=π$，
$∴ω=\frac{2π}{T}=2$，
又$∵$图象上一个最低点为$M(\frac{2π}{3}$，$-2)$
$∴2×\frac{2π}{3}+φ=2kπ-\frac{π}{2}$，$k\in Z$，
$∴φ=2kπ-\frac{11π}{6}=2\left(k-1\right)+\frac{π}{6}(k\in Z)$，而$0<φ<\frac{π}{2}$，
$∴φ=\frac{π}{6}$，
$∴f\left(x\right)=2sin(2x+\frac{π}{6})$；

$(2)$由$2kπ+\frac{π}{2}\leq 2x+\frac{π}{6}\leq 2kπ+\frac{3π}{2}(k\in Z)$得，$kπ+\frac{π}{6}\leq x\leq kπ+\frac{2π}{3}(k\in Z)$．
$∴f(x)$的单调递减区间为$[kπ+\frac{π}{6},kπ+\frac{2π}{3}]$，$k\in Z$，
$(3)∵x\in [\frac{π}{12}$，$\frac{π}{2}]$，

$∴2x+\frac{π}{6}\in [\frac{π}{3}$，$\frac{7π}{6}]$，
$∴-\frac{1}{2}\leq sin\left(2x+\frac{π}{6}\right)\leq 1$，
$∴-1\leq f(x)\leq 2$．
即$f(x)$的值域为$[-1,2]$．

【解析】本题考查由$y=Asin(ωx+φ)$的部分图象确定其解析式，考查正弦函数的单调性与最值，属于中档题．
$(1)$由题意知，相邻两个零点之间距离为半周期，可求得$ω$，由最低点坐标，可求得$φ$，从而可求$f(x)$的解析式；
$(2)$由正弦函数的单调减区间即可求得$f(x)$的单调递减区间；
$(3)$由*x*的范围求出$2x+\frac{π}{6}$的取值范围，再利用正弦函数的单调性即可求得$f(x)$的值域．

1. 已知$a\in R$，函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}x-7,x\geq a\\x^{2}-4x,x<a\end{matrix}\right.$．

$(1)$若函数$y=f\left(x\right)$恰有2个零点，求实数*a*的取值范围；

$(2)$若$f\left(f\left(x\right)\right)\geq f\left(x\right)$，求实数*x*的取值范围．

【答案】解：$(1)$由$x-7=0$得$x=7$，

由$x^{2}-4x=0$得$x=0$或$x=4$，

若函数$y=f\left(x\right)$恰有2个零点，则2个零点分别为0，4时，可得$a>7$，

若2个零点分别为0，7时，可得$0<a\leq 4$，

若2个零点分别为4，7时，零点0必然出现，不符合题意，

故实数*a*的取值范围为$(0,4]∪(7,+\infty )$

$(2)$设$u=f\left(x\right),$ 当$u⩾a$时，$f\left(u\right)=u-7>u$，必无解，

当$u<a$时，$u^{2}-4u⩾u,u⩾5$或$u⩽0$，

情况一：当$a<0$时，可得*u* $<a$，即$f(x)<a$，

$①x\geq a$时，$x-7<a$，则$a\leq x<7+a$ ，

$②x<a$时，$x^{2}-4x<a$，因为$x^{2}-4x>a^{2}-4a>0>a$，无解，

因此实数*x*的取值范围是$[a,7+$ $a)$

情况二：当$0\leq a\leq 4$时，可得$u\leq 0$，即*f* $(x)\leq 0$，$①x\geq a$时，$x-7\leq 0$，则$a\leq x\leq 7$，

$②x<a$时，$x^{2}-4x\leq 0$，则$0\leq x<a$ ，因此实数*x*的取值范围是$[0,7]$，

情况三：当$4<a<5$时，可得$u\leq 0$，即$f(x)\leq 0$，

$①$ $x\geq a$时，$x-7\leq 0$，则$a\leq x\leq 7$，

$②$ *x* $<a$时，$x^{2}-4x\leq 0$，则$0\leq x\leq 4$，因此实数*x*的取值范围是$[0,4]∪[a,7]$

情况四：当*a* $>5$时，可得$5\leq u$ $<a$或$u\leq 0$，即$5\leq f$ $(x$ $)<a$或$f(x)\leq 0$

$①x\geq a$时，$5\leq x$ $-7<a$或$.x$ $-7\leq 0$，则$12\leq x$ $<7+a$或$x\leq 7$，

$②$ *x* $<a$时，$5⩽x^{2}-4x<a$或$x^{2}-4x⩽0$或$5⩽x<2+\sqrt{a+4}$或$2-\sqrt{a+4}<x⩽-1$或$0⩽x⩽4$，

因为$a-\left(\sqrt{a+4}+2\right)=\frac{(a-2)^{2}-\left(a+4\right)}{a-2+\sqrt{a+4}}=\frac{a^{2}-5a}{a-2+\sqrt{a+4}}>0,$故$2+\sqrt{a+4}<a$，

因此*i*．$5<a\leq 7$时，

实数*x*的取值范围是$(2-\sqrt{a+4},-1]∪[0,4]∪[5,2+\sqrt{a+4})∪[a,7]∪[12,7+a),$

$ii.$当$7<a<12$时，

实数*x*的取值范围是$(2-\sqrt{a+4},-1]∪[0,4]∪[5,2+\sqrt{a+4})∪[12,7+a),$

$iii.$当$a\geq 12$时，实数*x*的取值范围是$(2-\sqrt{a+4},-1]∪[0,4]∪[5,2+\sqrt{a+4})∪[a,7+a)$．

【解析】本题主要考查了分段函数的零点，换元法解不等式，分类讨论的思想，考查了运算能力，属于难题．
根据*a*的范围分类讨论，即可求出不等式的解．
$(1)$根据分段函数每段上函数的零点，结合零点个数可求出*a*的取值范围；
$(2)$设$u=f\left(x\right),$ 当$u⩾a$时，$f\left(u\right)=u-7>u$，必无解，当$u<a$时解得$u⩾5$或$u⩽0$，