**2020-2021学年高一上学期期末考试解答题压轴题专练（四）**

 班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_得分：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

一、解答题

1. 已知定义在*R*上的函数$f(x)$对任意实数*x*，*y*都满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当$x>0$时，$f(x)>0$

    $(1)$判断函数$f(x)$的奇偶性，并证明；

    $(2)$判断函数$f(x)$的单调性，并证明；

    $(3)$解不等式$f(x^{2}-ax)+f(2x-2a)<0$．

【答案】解：$(1)f(x)$为奇函数，
证明：令$x=y=0$，则 $f(0)=0$．
令$y=-x$，则$f(0)=f(x)+f(-x)$，即$f(-x)=-f(x)$．
故$f(x)$为奇函数；
$(2)f(x)$在*R*上为增函数，
证明：设，且$x\_{1}>x\_{2}$，则$x\_{1}-x\_{2}>0$，$∴f(x\_{1}-x\_{2})>0$，
则$f(x\_{1})+f(-x\_{2})=f(x\_{1}-x\_{2})>0$，$∴f(x\_{1})>-f(-x\_{2})=f(x\_{2})$，
故$f(x)$为*R*上的增函数；
$(3)$ 因为$f(x)$是奇函数，所以$f(x^{2}-ax)<f(-2x+2a)$，
又$f(x)$在*R*上为增函数，
所以$x^{2}-ax<-2x+2a$即$x^{2}+(2-a)x-2a<0$，
所以$(x-a)(x+2)<0$，
所以当$a<-2$时不等式的解集是$\{x|a<x<-2\}$，
当$a>-2$时不等式的解集是$\{x| -2<x<a \}$，
当$a=-2$时不等式的解集是$Φ$．

【解析】本题考查了抽象函数的奇偶性、单调性、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．
$(1)$令$x=y=0$，可得$f(0)=0.$令$y=-x$，可得$f(0)=f(x)+f(-x)$，化简即可得出奇偶性；
$(2)$设$x\_{1}>x\_{2}$，可得$x\_{1}-x\_{2}>0$，$f(x\_{1}-x\_{2})>0$，代入可得$f(x\_{1})>f(x\_{2})$，即可得出单调性；
$(3)$利用前两问的结论，将$f(x^{2}-ax)<f(-2x+2a)$转化为$x^{2}+(2-a)x-2a<0$，分类讨论，得到解集．

1. 已知函数$h(x)=x^{2}+bx+c$是偶函数，且$h(-2)=0$，$f(x)=\frac{h\left(x\right)}{x}$．
$(1)$当$x\in [1,2]$时，求函数$f(x)$的值域；
$(2)$设$F(x)=x^{2}+\frac{16}{x^{2}}-2a(x-\frac{4}{x}),x\in [1,2],a\in R,$求$F(x)$的最小值$g(a)$
$(3)$对$(2)$中的$g(a)$，若不等式$g(a)>-2a^{2}+at+4$对于任意的$a\in (-3,0)$恒成立，求实数*t*的取值范围．

【答案】解：$(1)∵$函数$h(x)=x^{2}+bx+c$是偶函数，$∴b=0$，
又$∵h(-2)=0$，$∴c=-4$，
$∴f(x)=x-\frac{4}{x}$，
当$x\in [1,2]$时$f(x)$单调递增，
$∴f(x)$的最小值为$f(1)=-3$，最大值$f(2)=0$，
$∴f(x)$的值域为$[-3,0];$
$(2)F(x)=x^{2}+\frac{16}{x^{2}}-2a(x-\frac{4}{x}),x\in [1,2],a\in R$，
由$(1)$知，$f(x)=x-\frac{4}{x}$，令$k=f(x)$，当$x\in [1,2]$时，$k\in [-3,0]$，
$F(x)=k^{2}-2ak+8$，$k\in [-3,0]$，令$G(k)=k^{2}-2ak+8$，$k\in [-3,0]$．
当$a\leq -3$时，$G(k)$在$[-3,0]$上单调递增，$g(a)=F(x)\_{min}=G(k)\_{min}=G(-3)=6a+17;$
当$-3<a<0$时，$G(t)$在$[-3,a]$上单调递减，在$[a,0]$上单调递增，$g(a)=F(x)\_{min}=G(k)\_{min}=G(a)=8-a^{2};$
当$a\geq 0$时，$G(t)$在$[-3,0]$上单调递减，$g(a)=F(x)\_{min}=G(k)\_{min}=G(0)=8;$

$(3)g(a)>-2a^{2}+at+4$，
当$-3<a<0$时，$8-a^{2}>-2a^{2}+at+4$，
即$t>a+\frac{4}{a}$，
令$φ(a)=a+\frac{4}{a}$，在$(-3,-2)$内是单调增函数，在$(-2,0)$内是单调减函数，
当且仅当$a=-2$时取最大值$φ(-2)=-4$，$∴t>-4$，
$∴$实数*t*的取值范围是$(-4,+\infty )$．

【解析】本题考查函数的奇偶性，对勾函数的单调性，换元思想，函数的最值和值域问题，不等式恒成立问题，属综合题，难度较大．
$(1)$先根据已知确定$h(x)$的解析式中的系数，进而确定$f(x)$的解析式，研究其单调性，即得函数的值域；
$(2)$由$(1)$知，$f(x)=x-\frac{4}{x}$，令$k=f(x)$，当$x\in [1,2]$时$k\in [-3,0]$，$F(x)=k^{2}-2ak+8$，$k\in [-3,0].$利用二次函数的性质分类讨论求得$g(a)$；
$(3)$根据$(2)$的结论，当$-3<a<0$时，$8-a^{2}>-2a^{2}+at+4$，分离参数*t*，$t>a+\frac{4}{a}$对勾函数的单调性求得右端的最大值，根据不等式恒成立思想即得*t*的取值范围．

1. 若函数$f\left(x\right)=x|x-m|+m^{2}$，$m\in R$
$(1)$若函数$f\left(x\right)$为奇函数，求*m*的值；
$(2)$若函数$\left[3,4\right]$在$x\in \left[1,2\right]$上是增函数，求实数*m*的取值范围；
$(3)$若函数$\left[3,4\right]$在$x\in \left[1,2\right]$上的最小值为7，求实数*m*的值．

【答案】$(1)∵f(x)$是奇函数，定义域为*R*  $∴f(-x)=-f(x)$，
令$x=0$，得$f(0)=0$，$∴m=0$
经检验：$m=0$时$f(-x)=-f(x)$，
$∴m=0$
$(2)①m⩽1$时，$f(x)=x^{2}-mx+m^{2}$开口向上，对称轴为$x=\frac{m}{2}⩽\frac{1}{2}$，
$∴f(x)$在$[1,2]$上单调递增．
$②m⩾2$时，$f(x)=-x^{2}+mx+m^{2}$开口向下，对称轴为$x=\frac{m}{2}$，
 $∴f(x)$在上单调递增，在上单调递减，
$∵f(x)$在$[1,2]$上单调递增
$∴\frac{m}{2}⩾2$，$∴m⩾4.$
$③1<m<2$时，$f(x)=\left\{\begin{matrix}-x^{2}+mx+m^{2} ,  x⩽m\\x^{2}-mx+m^{2} ,  x>m\end{matrix}\right.$ ，
函数$f(x)$在，上单调递增，在$(\frac{m}{2},m)$上单调递减，
$∴f(x)$在$[1,2]$上不单调，不满足题意．
 $∴m$的取值范围是![(−{\rm ∞},1]∪[4,+{\rm ∞}).]()
$(3)$由$(2)$可知
$①m⩽1$时，$f(x)=x^{2}-mx+m^{2}$，$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，
$∴f(x)\_{min}=f(1)=1-m+m^{2}=7$解得$m=-2$或$m=3∵m⩽1∴m=-2$
$②m⩾2$时，$f(x)=-x^{2}+mx+m^{2}$， $f(x)$在上单调递增，在上单调递减，
当$\frac{m}{2}⩾\frac{3}{2}$即$m⩾3$时，$f(x)\_{min}=f(1)=-1+m+m^{2}=7$解得：$m=\frac{-1\pm \sqrt{33}}{2}($舍$)$
当$\frac{m}{2}<\frac{3}{2}$即$2⩽m<3$时，$f(x)\_{min}=f(2)=-4+2m+m^{2}=7$解得：$m=-1\pm 2\sqrt{3}$，
$∵2⩽m<3$，$∴m=2\sqrt{3}-1$
$③1<m<2$时，$f(x)=\left\{\begin{matrix}-x^{2}+mx+m^{2} ,  x⩽m\\x^{2}-mx+m^{2} ,  x>m\end{matrix}\right.$函数$f(x)$在，上单调递增，在$(\frac{m}{2},m)$上单调递减，
$∴$当$1<m<2$时，$f(x)\_{min}=f(m)=m^{2}=7$   解得：$m=\pm \sqrt{7}($舍$)$
综上：$m=-2$或$2\sqrt{3}-1.$

【解析】本题考查函数的奇偶性及二次函数的单调性与最值，属于中档题．
$(1)$利用$f(0)=0$易得*m*的值，再进行检验即可．
$(2)$对*m*分类讨论得到函数$f\left(x\right)$，再利用二次函数的单调性求得实数*m*的取值范围．
$(3)$由$(2)$求得每段函数的最小值，解得实数*m*的值．

1. 已知函数$f(x)=\frac{4^{x}+k⋅2^{x}+1}{4^{x}+2^{x}+1}$．

$(1)$若对任意的$x\in R$，$f(x)>0$恒成立，求实数*k*的取值范围；

$(2)$若$f(x)$的最小值为$-2$，求实数*k*的值；

$(3)$若对任意的$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\in R$，均存在以$f(x\_{1})$，$f(x\_{2})$，$f(x\_{3})$为三边长的三角形，求实数*k*的取值范围．

【答案】解：$(1)$对任意的$x\in R$，$f(x)>0$恒成立，
则$4^{x}+k⋅2^{x}+1>0$恒成立，只需$k>-(2^{x}+\frac{1}{2^{x}})$，
因为$-(2^{x}+\frac{1}{2^{x}})\leq -2\sqrt{2^{x}×\frac{1}{2^{x}}}=-2$，只需$k>-2$，
所以$k>-2$．
$(2)$因为$f(x)=\frac{4^{x}+k⋅2^{x}+1}{4^{x}+2^{x}+1}=1+\frac{k-1}{2^{x}+\frac{1}{2^{x}}+1}$，
令$t=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}+1⩾3$，则$y=1+\frac{k-1}{t}(t⩾3)$，
当$k>1$时，$y\in (1,\frac{k+2}{3}]$无最小值，舍去；
当$k=1$时，$y=1$最小值不是$-2$，舍去；
当$k<1$时，$y\in [\frac{k+2}{3},1),∴\frac{k+2}{3}=-2,k=-8;$
综上所述，$k=-8$．
$(3)$若对任意的$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\in R$，均存在以$f(x\_{1})$，$f(x\_{2})$，$f(x\_{3})$为三边长的三角形，即$f(x\_{1})+f(x\_{2})>f(x\_{3})$对任意$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\in R$恒成立．
当$k>1$时，因$2<f(x\_{1})+f(x\_{2})\leq \frac{2k+4}{3}$且$1<f(x\_{3})\leq \frac{k+2}{3}$，故$\frac{k+2}{3}\leq 2$，即$1<k\leq 4;$
当$k=1$时，$f(x\_{1})=f(x\_{2})=f(x\_{3})=1$，满足条件；
当$k<1$时，$\frac{2k+4}{3}\leq f(x\_{1})+f(x\_{2})<2$，且$\frac{k+2}{3}\leq f(x\_{3})<1$，故时，$\frac{2k+4}{3}\geq 1$，解得$-\frac{1}{2}\leq k<1;$
综上所述，实数*k*的取值范围是$-\frac{1}{2}\leq k\leq 4$．

【解析】本题综合考查指数型函数的最值、不等式恒成立问题和的函数的值域的应用，考查计算能力和转化能力和分离讨论思想，属中档题．
$(1)$对任意的$x\in R$，$f(x)>0$恒成立，则$4^{x}+k⋅2^{x}+1>0$恒成立，分离参数得$k>-(2^{x}+\frac{1}{2^{x}})$，求出$-(2^{x}+\frac{1}{2^{x}})\leq -2\sqrt{2^{x}×\frac{1}{2^{x}}}=-2$，即可得答案．
$(2)$令$t=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}+1⩾3$，则$y=1+\frac{k-1}{t}(t⩾3)$，分别考虑当$k>1$时、当$k=1$时、当$k<1$时函数求函数的最值即可解答$;$
$(3)$若对任意的$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\in R$，均存在以$f(x\_{1})$，$f(x\_{2})$，$f(x\_{3})$为三边长的三角形，即$f(x\_{1})+f(x\_{2})>f(x\_{3})$对任意$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\in R$恒成立．
再在当$k>1$时、当$k=1$时、当$k<1$时，分别考虑最后综合即可得到实数*k*的取值范围．

1. 设函数$f(x)=sin(ωx+φ+\frac{π}{3})$，

$(1)$若$f(x)$的图象上相邻两零点的距离为$\frac{π}{4}$，图象过点$(\frac{π}{24},\frac{1}{2})$，求函数$y=2f(x)+\sqrt{2}$的零点；

$(2)$已知$f(x)$同时满足下列三个条件：

$①$当$|f(x\_{1})-f(x\_{2})|=2$时，$|x\_{1}-x\_{2}|$的最小值为$\frac{π}{2}$；$②y=f(x-\frac{π}{3})$是奇函数；$③f(0)>f(\frac{π}{6})$．
若$f(x)$在$[0,t)$上没有最大值，求实数*t*的取值范围．

【答案】解：$(1)∵f(x)$的图象上相邻两零点的距离为$\frac{π}{4}$，

$∴f(x)$的周期为$\frac{π}{2}$，则$ω=4$，

$∵f(x)$的图象过点$(\frac{π}{24},\frac{1}{2})$，$∴sin (\frac{π}{2}+φ)=cos φ=\frac{1}{2}$，

$∴φ=2kπ+\frac{π}{3}$或$2kπ-\frac{π}{3}$，$k\in Z$，

当$φ=2kπ+\frac{π}{3}$时，
由$y=2f(x)+\sqrt{2}=2sin (4x+\frac{2π}{3})+\sqrt{2}=0$，
得$4x+\frac{2π}{3}=2kπ-\frac{π}{4}$或$2kπ+\frac{5π}{4}$，解得$x=\frac{kπ}{2}-\frac{11π}{48}$或$\frac{kπ}{2}+\frac{7π}{48}(k\in Z)$；

当$φ=2kπ-\frac{π}{3}$时，由$y=2f(x)+\sqrt{2}=2sin4x+\sqrt{2}=0$得

$4x=2kπ-\frac{π}{4}$或$2kπ+\frac{5π}{4}$，解得$x=\frac{kπ}{2}-\frac{π}{16}$或$\frac{kπ}{2}+\frac{5π}{16}(k\in Z)$．

$(2)$由条件$①$表示函数的半周期为$\frac{π}{2}$，故$ω=2$，故$f(x)=sin(2x+φ+\frac{π}{3})$，根据条件$②$，有$sin[2(x-\frac{π}{3})+φ+\frac{π}{3}]=sin(2x+φ-\frac{π}{3})$是奇函数，故$φ-\frac{π}{3}=kπ(k\in Z)$，$φ=kπ+\frac{π}{3}(k\in Z)$，$f(x)=sin(2x+kπ+\frac{2π}{3})(k\in Z)$．
根据条件$③$，$f(0)>f(\frac{π}{6})$，即，
故*k*为偶数，不妨设$k=0$，
由此求得函数$f(x)$的表达式为$f(x)=sin(2x+\frac{2π}{3})$．
画出图象如图所示，$f(0)=f(\frac{5π}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{11π}{12})=1$，
由图可知，要使$f(x)$在$[0,t)$上没有最大值，*t*的取值范围是$(\frac{5π}{6},\frac{11π}{12}]$．



【解析】本题考查三角函数的图象与性质，属较难题．
$(1)$根据相邻零点的距离为半个周期，求得函数的周期，进而求得$ω$，结合所过定点坐标，求得$φ$的值，然后求得所求函数的零点即可$;$
$(2)$由$①$得到半周期，进而得到$ω$，得出$f(x)$的函数表达式$($只有参数$φ)$，根据$②$，进一步得到$φ$的值$($与$k\in Z$有关的表达式$)$，从而得到$f(x)$的解析表达式，进一步根据$③$得到关于*k*的不等式，从而得到*k*必为偶数，由三角函数的周期性，不妨设$k=0$，然后考察$f(x)$的图象，得出在$[0,t)$上没有最大值的*t*的取值范围．

1. 已知点$A(x\_{1},f(x\_{1})),B(x\_{2},f(x\_{2}))$是函数$y=2sin(ωx+φ)(ω>0,φ\in (-\frac{π}{2},0))$图象上的任意两点，且角$φ$的终边经过点$P(1,-\sqrt{3})$，若$\left|f(x\_{1})-f(x\_{2})\right|=4$时，$\left|x\_{1}-x\_{2}\right|$的最小值为$\frac{π}{3}$
$(1)$求函数$f(x)$的解析式；
$(2)$若方程$3\left[f(x)\right]^{2}-f(x)+m=0$在$x\in (\frac{π}{9},\frac{4π}{9})$内有两个不同的解，求实数*m*的取值范围．

【答案】解$(1)$因为角$φ$的终边经过点$P\left(1,-\sqrt{3}\right)$，

所以$tanφ=-\sqrt{3}$．

又因为$-\frac{π}{2}<φ<0$，所以$φ=-\frac{π}{3}$．

由$\left|f\left(x\_{1}\right)-f\left(x\_{2}\right)\right|=4$时，$\left|x\_{1}-x\_{2}\right|$的最小值为$\frac{π}{3}$得$T=\frac{2π}{3}$，

即$\frac{2π}{ω}=\frac{2π}{3}$，所以$ω=3$．

因此$f\left(x\right)=2sin\left(3x-\frac{π}{3}\right)$．

$(2)∵x\in \left(\frac{π}{9},\frac{4π}{9}\right)$，$∴3x-\frac{π}{3}\in \left(0,π\right)$．

$∴0<sin\left(3x-\frac{π}{3}\right)\leq 1$．

设$f(x)=t$，则$t\in (0,2]$．

因此问题等价于方程$3t^{2}-t+m=0$在$t\in (0,2]$仅有一根或有两个相等的根．

即函数$y=-3t^{2}+t,t\in (0,2]$与$y=m$的图象有且仅有一个交点．

作函数$y=-3t^{2}+t,t\in (0,2]$与$y=m$的图象如下：



$∵$当$t=\frac{1}{6}$时，$y=\frac{1}{12};$

当$t=0$时，$y=0;$

当$t=2$时，$y=-10$．

$∴$当$m=\frac{1}{12}$或$-10\leq m\leq 0$时，

函数$y=-3t^{2}+t,t\in (0,2]$与$y=m$的图象有且仅有一个交点．

$∴m$的取值范围是：$m=\frac{1}{12}$或$-10\leq m\leq 0$．

【解析】本题考查了任意角的三角函数，函数$y=Asin\left(ωx+φ\right)$的图象与性质，换元法，数形结合思想和函数的零点与方程根的关系

$(1)$利用任意角的三角函数定义得$φ=-\frac{π}{3}$，再利用函数$y=Asin\left(ωx+φ\right)$的周期性得$ω=3$，从而得结论$;$

$(2)$利用函数$y=Asin\left(ωx+φ\right)$的值域得$0<sin\left(3x-\frac{π}{3}\right)\leq 1$，再利用换元法和函数的零点与方程根的关系把问题转化为：函数$y=-3t^{2}+t,t\in (0,2]$与$y=m$的图象有且仅有一个交点，最后利用数形结合思想得结论．

1. 已知定义在*R*上的函数$f(x)$不恒为零，且对于任意*x*，$y\in R$满足．
$(1)$求$f(0)$，$f(1)$的值，并判断函数$f(x)$的奇偶性；
$(2)$若对任意的$x\in R$有，且．
$①$证明：；
$②$证明：不等式![f( \dfrac{x}{2}){\rm [}f(x){\rm +}f(2x)+…+f(2019x)]⩽{f}^{2}(x{\rm -}20){\rm +}{f}^{2}(19{\rm -}x)]()恒成立．

【答案】解：$(1)$令$x=y$，得$f(x-y)=f(x)f(1-x)-f(x)f(1-x)=0$，
$∴f(0)=0$，
令$y=0$，得$f(x)=f(x)f(1)-f(0)f(1-x)=f(x)f(1)$，
$∵$定义在*R*上的函数$f(x)$不恒为零，
$∴f(1)=1$，
令$y=1$，得$f(x-1)=f(x)f(0)-f(1-x)f(1)=-f(1-x)$，
即对于任意的$x\in R$，恒有$f(x-1)=-f(1-x)$，即$f(-x)=-f(x)$，
$∴f(x)$为奇函数；
$(2)$证明：$①g(x-y)=f(1+y-x)=f(1+y)f(1-x)-f(x)f(-y)$
$=f(1-y)f(1-x)+f(x)f(y)$
$=g(x)g(y)+f(x)f(y)$，
同理$g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y)$，
$∴2f(x)f(y)=g(x-y)-g(x+y)$；
$②∵f(1)=f(1+x-x)=f(1+x)f(1-x)-f(x)f(-x)$
$=f^{2}(1-x)+f^{2}(x)$，
$∴f^{2}(1-x)+f^{2}(x)=1$，
$∴|f(x)|\leq 1$且$f^{2}(x-20)+f^{2}(19-x)=f^{2}(20-x)+f^{2}(x-19)=1$，
则$2f(\frac{x}{2})[f(x)+f(2x)+\cdots +f(2019x)]$
$=g(x-\frac{x}{2})-g(x+\frac{x}{2})+g(2x-\frac{x}{2})-g(2x+\frac{x}{2})+\cdots +g(2019x-\frac{x}{2})-g(2019x+\frac{x}{2})$
$=g(x-\frac{x}{2})-g(2019x+\frac{x}{2})$
$=g(\frac{2020}{2}x-\frac{2019}{2}x)-g(\frac{2020}{2}x+\frac{2019}{2}x)$
$=2f(1010x)f(\frac{2019}{2}x)$，
故$f(\frac{x}{2})[f(x)+f(2x)+\cdots +f(2019x)]=f(1010x)f(\frac{2019}{2}x)\leq 1=f^{2}(x-20)+f^{2}(19-x)$，即得证．

【解析】本题主要考查抽象函数的应用，考查赋值法以及推理论证能力，化简求解能力，抓住抽象函数的特征式，并灵活运用是解题的关键，对数学思维的要求较高，属于难题．
$(1)$通过赋值法，$x=y$，可得$f(0)$；令$y=0$，得$f(x)=f(x)f(1)$，求出$f(1)=1$；令$y=1$，得$f(x-1)=-f(1-x)$，即可判定奇偶性$;$
$(2)①$表示出$g(x-y)$及$g(x+y)$，即可得证；
$②$首先推导出$f^{2}(1-x)+f^{2}(x)=1$，进而得出结论$|f(x)|\leq 1$且$f^{2}(x-20)+f^{2}(19-x)=f^{2}(20-x)+f^{2}(x-19)=1$，且$2f(\frac{x}{2})[f(x)+f(2x)+\cdots +f(2019x)]=2f(1010x)f(\frac{2019}{2}x)$，由此即可得证．

1. 如果函数$f(x)$在其定义域*D*内，存在实数$x\_{0}\in D,$使得$f(x\_{0}+1)=f(x\_{0})+f(1)$成立，则称函数$f(x)$为“可拆分函数”．

$(1)$判断函数$f(x)=\frac{1}{x}$是否为“可拆分函数”？并说明理由；

$(2)$证明：函数$f(x)=2^{x}+x^{2}$为“可拆分函数”；
$(3)$设函数$f(x)=lg \frac{a}{2^{x}+1}$为“可拆分函数”，求实数*a*的取值范围。

【答案】解：$(1)$假设$f(x)$是“可分拆函数”，则存在$x\_{0}$，使得$\frac{1}{x\_{0}+1}=\frac{1}{x\_{0}}+\frac{1}{1}$，
即$x\_{0}^{2}+x\_{0}+1=0$，而此方程的判别式$△=1-4=-3<0$，方程无实数解，
所以，$f(x)$不是“可分拆函数”$.$
$(2)$证明：令$h(x)=f(x+1)-f(x)-f(1)$，
则$h(x)=2^{x+1}+(x+1)^{2}-2^{x}-x^{2}-2-1=2(2^{x-1}+x-1)$，
又$h(0)=-1$，$h(1)=2$，故$h(0)⋅h(1)<0$，
所以$h(x)=f(x+1)-f(x)-f(1)=0$在$(0,1)$上有实数解$x\_{0}$，
也即存在实数$x\_{0}$，使得$f(x\_{0}+1)=f(x\_{0})+f(1)$成立，
所以，$f(x)=2^{x}+x^{2}$是“可分拆函数”．
$(3)$因为函数$f(x)=lg\frac{a}{2^{x}+1}$为“可分拆函数”，
所以存在实数$x\_{0}$，使得$lg\frac{a}{2^{x\_{0}+1}+1}=lg\frac{a}{2^{x\_{0}}+1}+lg\frac{a}{3}$，$\frac{a}{2^{x\_{0}+1}+1}=\frac{a}{2^{x\_{0}}+1}×\frac{a}{3}$且$a>0$，
所以，$a=\frac{3(2^{x\_{0}}+1)}{2^{x\_{0}+1}+1}=\frac{3(2^{x\_{0}}+1)}{2×2^{x\_{0}}+1}$，
令$t=2^{x\_{0}}$，则$t>0$，所以，$a=\frac{3(t+1)}{2t+1}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2(2t+1)}$，
由$t>0$得$\frac{3}{2}<a<3$，即*a*的取值范围是$(\frac{3}{2},3).$

【解析】本题考查了抽象函数的单调性、不等式与方程的解法、新定义、函数零点判定定理，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．
$(1)$假设$f(x)$是“可分拆函数”，则存在$x\_{0}$，使得$\frac{1}{x\_{0}+1}=\frac{1}{x\_{0}}+\frac{1}{1}$，即$x\_{0}^{2}+x\_{0}+1=0$，判断此函数是否有解即可得出．
$(2)$令$h(x)=f(x+1)-f(x)-f(1)$，则$h(x)=2^{x+1}+(x+1)^{2}-2^{x}-x^{2}-2-1=2(2^{x-1}+x-1)$，又$h(0)=-1$，$h(1)=2$，故$h(0)⋅h(1)<0$，所以$h(x)=0$在$(0,1)$上有实数解$x\_{0}$，也即存在实数$x\_{0}$，使得$f(x\_{0}+1)=f(x\_{0})+f(1)$成立，即可证明．
$(3)$因为函数$f(x)=lg\frac{a}{2^{x}+1}$为“可分拆函数”，所以存在实数$x\_{0}$，使得$lg\frac{a}{2^{x\_{0}+1}+1}=lg\frac{a}{2^{x\_{0}}+1}+lg\frac{a}{3}$，即$\frac{a}{2^{x\_{0}+1}+1}=\frac{a}{2^{x\_{0}}+1}×\frac{a}{3}$且$a>0$，所以，$a=\frac{3(2^{x\_{0}}+1)}{2^{x\_{0}+1}+1}=\frac{3(2^{x\_{0}}+1)}{2×2^{x\_{0}}+1}$，换元利用单调性即可得出．