**2020-2021学年高一上学期期末考试解答题压轴题专练（四）**

班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_得分：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

一、解答题

1. 已知定义在*R*上的函数对任意实数*x*，*y*都满足，且当时，

    判断函数的奇偶性，并证明；

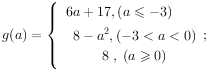
    判断函数的单调性，并证明；

    解不等式．

【答案】解：为奇函数，  
证明：令，则 ．  
令，则，即．  
故为奇函数；  
在*R*上为增函数，  
证明：设{\rm ∀}{x}_{1},{x}_{2}∈R，且，则，，  
则，，  
故为*R*上的增函数；  
 因为是奇函数，所以，  
又在*R*上为增函数，  
所以即，  
所以，  
所以当时不等式的解集是，  
当时不等式的解集是，  
当时不等式的解集是．

【解析】本题考查了抽象函数的奇偶性、单调性、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．  
令，可得令，可得，化简即可得出奇偶性；  
设，可得，，代入可得，即可得出单调性；  
利用前两问的结论，将转化为，分类讨论，得到解集．

1. 已知函数是偶函数，且，．  
   当时，求函数的值域；  
   设求的最小值  
   对中的，若不等式对于任意的恒成立，求实数*t*的取值范围．

【答案】解：函数是偶函数，，  
又，，  
，  
当时单调递增，  
的最小值为，最大值，  
的值域为  
，  
由知，，令，当时，，  
，，令，．  
当时，在上单调递增，  
当时，在上单调递减，在上单调递增，  
当时，在上单调递减，  
  
，  
当时，，  
即，  
令，在内是单调增函数，在内是单调减函数，  
当且仅当时取最大值，，  
实数*t*的取值范围是．

【解析】本题考查函数的奇偶性，对勾函数的单调性，换元思想，函数的最值和值域问题，不等式恒成立问题，属综合题，难度较大．  
先根据已知确定的解析式中的系数，进而确定的解析式，研究其单调性，即得函数的值域；  
由知，，令，当时，，利用二次函数的性质分类讨论求得；  
根据的结论，当时，，分离参数*t*，对勾函数的单调性求得右端的最大值，根据不等式恒成立思想即得*t*的取值范围．

1. 若函数，   
   若函数为奇函数，求*m*的值；  
   若函数在上是增函数，求实数*m*的取值范围；  
   若函数在上的最小值为7，求实数*m*的值．

【答案】是奇函数，定义域为*R*  ，  
令，得，  
经检验：时，  
                                     
时，开口向上，对称轴为，  
在上单调递增．  
时，开口向下，对称轴为，  
 在(−{\rm ∞}, \dfrac{m}{2})上单调递增，在( \dfrac{m}{2},+{\rm ∞})上单调递减，  
在上单调递增  
，   
时， ，  
函数在(−{\rm ∞}, \dfrac{m}{2})，(m,+{\rm ∞})上单调递增，在上单调递减，  
在上不单调，不满足题意．  
 的取值范围是(−{\rm ∞},1]∪[4,+{\rm ∞}).         
由可知  
时，，在上单调递增，  
解得或                         
时，， 在(−{\rm ∞}, \dfrac{m}{2})上单调递增，在( \dfrac{m}{2},+{\rm ∞})上单调递减，  
当即时，解得：舍  
当即时，解得：，  
，  
时，函数在(−{\rm ∞}, \dfrac{m}{2})，(m,+{\rm ∞})上单调递增，在上单调递减，  
当时，   解得：舍  
综上：或

【解析】本题考查函数的奇偶性及二次函数的单调性与最值，属于中档题．  
利用易得*m*的值，再进行检验即可．  
对*m*分类讨论得到函数，再利用二次函数的单调性求得实数*m*的取值范围．  
由求得每段函数的最小值，解得实数*m*的值．

1. 已知函数．

若对任意的，恒成立，求实数*k*的取值范围；

若的最小值为，求实数*k*的值；

若对任意的，均存在以，，为三边长的三角形，求实数*k*的取值范围．

【答案】解：对任意的，恒成立，  
则恒成立，只需，  
因为，只需，  
所以．  
因为，  
令，则，  
当时，无最小值，舍去；  
当时，最小值不是，舍去；  
当时，  
综上所述，．  
若对任意的，均存在以，，为三边长的三角形，即对任意恒成立．  
当时，因且，故，即  
当时，，满足条件；  
当时，，且，故时，，解得  
综上所述，实数*k*的取值范围是．

【解析】本题综合考查指数型函数的最值、不等式恒成立问题和的函数的值域的应用，考查计算能力和转化能力和分离讨论思想，属中档题．  
对任意的，恒成立，则恒成立，分离参数得，求出，即可得答案．  
令，则，分别考虑当时、当时、当时函数求函数的最值即可解答  
若对任意的，均存在以，，为三边长的三角形，即对任意恒成立．  
再在当时、当时、当时，分别考虑最后综合即可得到实数*k*的取值范围．

1. 设函数，

若的图象上相邻两零点的距离为，图象过点，求函数的零点；

已知同时满足下列三个条件：

当时，的最小值为；是奇函数；．  
若在上没有最大值，求实数*t*的取值范围．

【答案】解：的图象上相邻两零点的距离为，

的周期为，则，

的图象过点，，

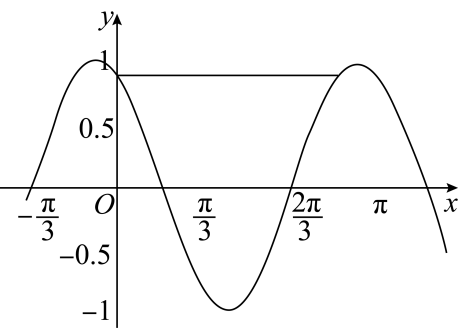
或，，

当时，  
由，  
得或，解得或；

当时，由得

或，解得或．

由条件表示函数的半周期为，故，故，根据条件，有是奇函数，故，，．  
根据条件，，即\sin \left(kπ+ \dfrac{2{\rm π}}{3}\right) > \sin (kπ+π)=0，  
故*k*为偶数，不妨设，  
由此求得函数的表达式为．  
画出图象如图所示，，，  
由图可知，要使在上没有最大值，*t*的取值范围是．



【解析】本题考查三角函数的图象与性质，属较难题．  
根据相邻零点的距离为半个周期，求得函数的周期，进而求得，结合所过定点坐标，求得的值，然后求得所求函数的零点即可  
由得到半周期，进而得到，得出的函数表达式只有参数，根据，进一步得到的值与有关的表达式，从而得到的解析表达式，进一步根据得到关于*k*的不等式，从而得到*k*必为偶数，由三角函数的周期性，不妨设，然后考察的图象，得出在上没有最大值的*t*的取值范围．

1. 已知点是函数图象上的任意两点，且角的终边经过点，若时，的最小值为   
   求函数的解析式；  
   若方程在内有两个不同的解，求实数*m*的取值范围．

【答案】解因为角的终边经过点，

所以．

又因为，所以．

由时，的最小值为得，

即，所以．

因此．

，．

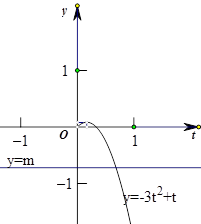
．

设，则．

因此问题等价于方程在仅有一根或有两个相等的根．

即函数与的图象有且仅有一个交点．

作函数与的图象如下：



当时，

当时，

当时，．

当或时，

函数与的图象有且仅有一个交点．

的取值范围是：或．

【解析】本题考查了任意角的三角函数，函数的图象与性质，换元法，数形结合思想和函数的零点与方程根的关系

利用任意角的三角函数定义得，再利用函数的周期性得，从而得结论

利用函数的值域得，再利用换元法和函数的零点与方程根的关系把问题转化为：函数与的图象有且仅有一个交点，最后利用数形结合思想得结论．

1. 已知定义在*R*上的函数不恒为零，且对于任意*x*，满足f(x{\rm -}y){\rm =}f(x)f(1{\rm -}y){\rm -}f(y)f(1{\rm -}x)．  
   求，的值，并判断函数的奇偶性；  
   若对任意的有f(1{\rm +}x){\rm =}f(1{\rm -}x)，且g(x){\rm =}f(1{\rm -}x)．  
   证明：2f(x)f(y){\rm =}g(x{\rm -}y){\rm -}g(x{\rm +}y)；  
   证明：不等式f( \dfrac{x}{2}){\rm [}f(x){\rm +}f(2x)+…+f(2019x)]⩽{f}^{2}(x{\rm -}20){\rm +}{f}^{2}(19{\rm -}x)恒成立．

【答案】解：令，得，  
，  
令，得，  
定义在*R*上的函数不恒为零，  
，  
令，得，  
即对于任意的，恒有，即，  
为奇函数；  
证明：  
   
，  
同理，  
；  
   
，  
，  
且，  
则  
   
   
   
，  
故，即得证．

【解析】本题主要考查抽象函数的应用，考查赋值法以及推理论证能力，化简求解能力，抓住抽象函数的特征式，并灵活运用是解题的关键，对数学思维的要求较高，属于难题．  
通过赋值法，，可得；令，得，求出；令，得，即可判定奇偶性  
表示出及，即可得证；  
首先推导出，进而得出结论且，且，由此即可得证．

1. 如果函数在其定义域*D*内，存在实数使得成立，则称函数为“可拆分函数”．

判断函数是否为“可拆分函数”？并说明理由；

证明：函数为“可拆分函数”；  
设函数为“可拆分函数”，求实数*a*的取值范围。

【答案】解：假设是“可分拆函数”，则存在，使得，  
即，而此方程的判别式，方程无实数解，  
所以，不是“可分拆函数”   
证明：令，  
则，  
又，，故，  
所以在上有实数解，  
也即存在实数，使得成立，  
所以，是“可分拆函数”．  
因为函数为“可分拆函数”，  
所以存在实数，使得，且，  
所以，，  
令，则，所以，，  
由得，即*a*的取值范围是

【解析】本题考查了抽象函数的单调性、不等式与方程的解法、新定义、函数零点判定定理，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．  
假设是“可分拆函数”，则存在，使得，即，判断此函数是否有解即可得出．  
令，则，又，，故，所以在上有实数解，也即存在实数，使得成立，即可证明．  
因为函数为“可分拆函数”，所以存在实数，使得，即且，所以，，换元利用单调性即可得出．