3．$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$；　4．3；　　　　　6．$-\dfrac{1}{2}$；　7．$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$；

8．1；　9．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　10．$(-1,1)$；　11．4；　12．-1；13．$[2,+\infty)$；　14．$[-3,0)$．

15．解：（1）因为$c^2=(a-b)^2+4$，所以$a^2+b^2-c^2=2ab-4$，

因为$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，且$\cos C=\dfrac{1}{3}$，

$\dfrac{2}{3}ab=2ab-4$，

所以$ab=3$．　　　　　　　　　　　　　　………2 分

因为$\cos C=\dfrac{1}{3}$，　$0<C<\pi$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，　　　　　　　　　………4 分

所以ΔABC 的面积为$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{2}$．　　　　　　　………6 分

（2）因为$\dfrac{4b}{\cos B}=\dfrac{\sqrt{6}c}{\cos C}$，以及正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以$\dfrac{4\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sqrt{6}\sin C}{\cos C}=4\sqrt{3}$，

所以$\tan B=\sqrt{3}$，　　　　　　　　　　　　　………8 分

又因为$0<B<\pi$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$，　　　　　　　　　　………10 分

因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin A=\sin(\dfrac{\pi}{3}+C)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos C+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin C$

$=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$．　　　　　　　　　　　　………14 分

15．解：（1）因为$\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$，　　1

所以$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{4}{3}$，　　　　　　　　　………2 分

即$2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-2=0$，

解得$\tan\alpha=2$或$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，

因为$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\tan\alpha=2$．　　　　　　　　………4 分

（2）由（1）$\tan\alpha=2$，

所以$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， ………6 分

因为 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，

所以 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ………8 分

所以 $\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$，

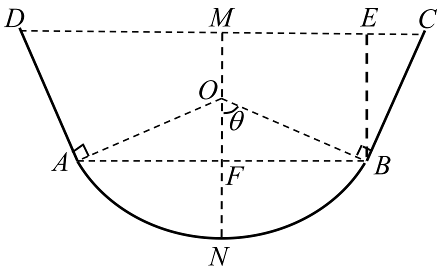
$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta=\dfrac{3}{5}$， ………12 分

所以 $\cos(\alpha-2\beta)=\cos\alpha\cos 2\beta+\sin\alpha\sin 2\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$． ………14 分

18．解：（1）因为底部圆弧 AB 所在的圆的半径为 1，$\angle BON=\theta$，

所以弧长 $AB=2\theta$， ………2 分

过 B 点作 $BE\perp CD$ 于点 E，设 MN 与 AB 交于点 F，



（第 18 题）

则结合题设条件有 $BE=MF=\dfrac{1}{2}+\cos\theta$，$\angle BCD=\theta$，

所以 $BC=\dfrac{BE}{\sin\theta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1+2\cos\theta}{2\sin\theta}$，

所以 $AD=BC=\dfrac{1+2\cos\theta}{2\sin\theta}$， ………6 分

所以 $f(\theta)=2000[(AD+BC)+\dfrac{5}{3}\times l_{\overset{\frown}{AB}}]$

$=2000(\dfrac{1+2\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{10\theta}{3})$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$． ………8 分

（2）$f'(\theta)=2000(\dfrac{-\cos\theta-2}{\sin^2\theta}+\dfrac{10}{3})=2000\times\dfrac{-10\cos^2\theta-3\cos\theta+4}{\sin^2\theta}$

$=2000\times\dfrac{-(2\cos\theta-1)(5\cos\theta+4)}{\sin^2\theta}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$． ………10 分

令 $f'(\theta)=0$，则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

θ	$(0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	$-$		$+$
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

………14 分

当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f(\theta)$ 取得极小值，即最小值，最小值为 $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{4000}{9}(6\sqrt{3}+5\pi)$（百元）.

答：当 θ 取 $\dfrac{\pi}{3}$ 时，建造总费用最低. ………16 分

19．（1）$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)\ge 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增； ………2 分

当 $a<0$ 时，当 $x<a$ 或 $x>\frac{a}{3}$ 时， $f'(x)>0$ ，当 $a<x<\frac{a}{3}$ 时， $f'(x)<0$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和在 $(\frac{a}{3},+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,\frac{a}{3})$ 上单调递减；

同理当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{a}{3})$ 和在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\frac{a}{3},a)$ 上单调递减. ………4 分

（2）当 $a=0$ 时，函数 $f'(x)$ 的零点是 0 ，而 $f(0)=-1$ ，所以不合题意，舍去； ………6 分

当 $a\neq 0$ 时，函数 $f'(x)$ 的零点是 a 和 $\frac{1}{3}a$ ，

因为 $f(a)=-1\neq 0$ ，

所以由函数 $f'(x)$ 与函数 $f(x)$ 存在相同的零点，

得 $f(\frac{a}{3})=0$ ，即 $\frac{a^3}{27}-\frac{2a^3}{9}+\frac{a^3}{3}-1=0$ ，解得 $a=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. ………8 分

（3）由（1）得，

当 $a\leq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，此时函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=a^2-2a$ ； ………10 分

当 $\frac{a}{3}\leq 1<a$ ，即 $1<a\leq 3$ 时，

函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(a)=-1$ ； ………12 分

当 $\frac{a}{3}>1$ ，即 $a>3$ 时，

因为 $f(1)=a^2-2a$ ， $f(a)=-1$ ，

所以 $f(1)>f(a)$ ，此时函数的最小值为 $f(a)=-1$. ………14 分

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $\begin{cases} a^2-2a\,, a\leq 1, \\ -1, \quad a>1. \end{cases}$ ………16 分

20．解：（1）因为 $x_1,x_2>0$ ，

所以不等式 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}<0 \Leftrightarrow x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$ ，

令 $g(x)=xf(x)$ ，因为 $0<x_1<x_2<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，不等式 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}<0$ 恒成立，

所以函数 $g(x)=xf(x)=\ln x-ax^2$ 在 $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$ 上单调递增， ………2 分

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-2ax\geq 0$ 在 $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$ 恒成立，

即 $2a\leq\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$ 恒成立，而 $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\mathrm{e}}$ ，

所以 $2a\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $a\leq\frac{1}{2\mathrm{e}}$ ，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{2\mathrm{e}}]$. ………4 分

（2）当 $a=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{x}{2\mathrm{e}}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}=\dfrac{2\mathrm{e}-2\mathrm{e}\ln x-x^2}{2\mathrm{e}x^2}(x>0)$，　………6 分

令 $g(x)=2\mathrm{e}-2\mathrm{e}\ln x-x^2$，$g'(x)=-\dfrac{2\mathrm{e}}{x}-2x<0$ 恒成立，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，　………8 分

又因为 $g(\sqrt{\mathrm{e}})=2\mathrm{e}-2\mathrm{e}\ln\sqrt{\mathrm{e}}-(\sqrt{\mathrm{e}})^2=0$，

所以在 $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$ 上 $f'(x)>0$，在 $(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(\sqrt{\mathrm{e}})=0$.　………10 分

（3）令 $h(x)=xf(x)+x=\ln x-ax^2+x$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+1=\dfrac{-2ax^2+x+1}{x}$

因为 $a\le 0$，$x>0$，

所以 $h'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，　………12 分

而 $h(1)=1-a>0$，$h(\mathrm{e}^{a-1})=a-1-a\mathrm{e}^{2a-2}+\mathrm{e}^{a-1}=a(1-\mathrm{e}^{2a-2})+(\mathrm{e}^{a-1}-1)$，

因为 $a\le 0$，$0<\mathrm{e}^{2a-2}<1$，$0<\mathrm{e}^{a-1}<1$，

所以 $h(\mathrm{e}^{a-1})<0$，

因为函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，

所以当 $a\le 0$ 时，曲线 $y=xf(x)$ 与直线 $y=-x$ 有且只有一个公共点.　………16 分