## §2.5　指数与对数

考情考向分析　幂的运算是解决与指数函数有关问题的基础，对数的概念和运算性质，换底公式等是研究指数函数、对数函数的前提，在高考中涉及面比较广．

1．根式

(1)根式的概念

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 根式的概念 | 符号表示 | 备注 |
| 如果*a*＝*xn*，那么*x*叫做*a*的*n*次实数方根 |  | *n*>1且*n*∈**N**\* |
| 当*n*为奇数时，正数的*n*次实数方根是一个正数，负数的*n*次实数方根是一个负数 |  | 0的*n*次实数方根是0 |
| 当*n*为偶数时，正数的*n*次实数方根有两个，它们互为相反数 | ± | 负数没有偶次方根 |

(2)两个重要公式

①＝(*n*为偶数)；

②()*n*＝*a*(注意*a*必须使有意义)．

2．有理指数幂

(1)分数指数幂的表示

①正数的正分数指数幂是＝(*a*>0，*m*，*n*∈**N**\*，*n*>1)；

②正数的负分数指数幂是＝＝(*a*>0，*m*，*n*∈**N**\*，*n*>1)；

③0的正分数指数幂是0,0的负分数指数幂无意义．

(2)有理指数幂的运算性质

①*asat*＝*as*＋*t*(*a*>0，*t*，*s*∈**Q**)；

②(*as*)*t*＝*ast*(*a*>0，*t*，*s*∈**Q**)；

③(*ab*)*t*＝*atbt*(*a*>0，*b*>0，*t*∈**Q**)．

3．对数的概念

(1)对数的定义

①一般地，如果*a*(*a*>0，*a*≠1)的*b*次幂等于*N*，即*ab*＝*N*，那么称*b*是以*a*为底*N*的对数，记作*b*＝log*aN*，其中，*a*叫做对数的底数，*N*叫做真数．

②底数的对数是1，即log*aa*＝1,1的对数是0，即log*a*1＝0.

(2)几种常见对数

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 对数形式 | 特点 | 记法 |
| 一般对数 | 底数为*a*(*a*>0且*a*≠1) | log*aN* |
| 常用对数 | 底数为10 | lg *N* |
| 自然对数 | 底数为e | ln *N* |

4.对数的性质与运算法则

(1)对数的性质

①＝*N*(*a*>0且*a*≠1，*N*>0)；

②log*aaN*＝*N*(*a*>0且*a*≠1)．

(2)对数的重要公式

①换底公式：log*bN*＝(*a*，*b*均大于零且不等于1，*N*>0)；

②log*ab*＝(*a*，*b*均大于零且不等于1)．

(3)对数的运算法则

如果*a*>0且*a*≠1，*M*>0，*N*>0，那么

①log*a*(*MN*)＝log*aM*＋log*aN*；

②log*a*＝log*aM*－log*aN*；

③log*aMn*＝*n*log*aM*(*n*∈**R**)；

④＝log*aM*.

概念方法微思考

根据对数的换底公式，

(1)思考log*ab*，log*ba*的关系；

(2)化简.

提示　(1)log*ab*·log*ba*＝1；

(2)＝log*ab*.

题组一　思考辨析

1．判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)＝()*n*＝*a*(*n*∈**N**\*)．(　×　)

(2)分数指数幂可以理解为个*a*相乘．(　×　)

(3)2*a*·2*b*＝2*ab*.(　×　)

(4)若*MN*>0，则log*a*(*MN*)＝log*aM*＋log*aN*.(　×　)

(5)若lg *x*2＝1，则*x*＝.(　×　)

题组二　教材改编

2．[P61例2]计算：＝ .

答案

3．[P80习题T6]计算：(lg 5)2＋lg 2×lg 50＝ .

答案　1

4．[P80习题T12]已知lg 6＝*a*，lg 12＝*b*，那么用*a*，*b*表示lg 24＝ .

答案　2*b*－*a*

题组三　易错自纠

5．要使＋(*a*－4)0有意义，则*a*的取值范围是 ．

答案　[2,4)∪(4，＋∞)

解析　要使原式有意义，则满足

解得2≤*a*<4或*a*>4.

6．有下列结论：

①lg(lg 10)＝0；

②lg(ln e)＝0；

③若lg *x*＝1，则*x*＝10；

④若log22＝*x*，则*x*＝1；

⑤若log*mn*·log3*m*＝2，则*n*＝9.

其中正确结论的序号是 ．

答案　①②③④⑤

解析　①lg 10＝1，则lg(lg 10)＝lg 1＝0；

②lg(ln e)＝lg 1＝0；

③底的对数等于1，则*x*＝10；

④底的对数等于1；

⑤log*mn*＝，log3*m*＝，则＝2，

即log3*n*＝2，故*n*＝9.

题型一　指数幂的运算

1.(*a*>0)的值是 ．

答案　

解析　＝

2．化简：(*a*>0)＝ .

答案　*a*2

解析　原式＝



3．已知*x*＋*x*－1＝3，则的值为 ．

答案　2

解析　＝*x*＋2＋*x*－1＝5，



**

＝(3－1)＝2.

4．已知*a*，*b*是方程*x*2－6*x*＋4＝0的两根，且*a*>*b*>0，则＝ .

答案

解析　由已知得，*a*＝3＋，*b*＝3－，

所以*a*＋*b*＝6，*ab*＝4，

所以2＝＝＝.

因为*a*>*b*>0，所以>，所以＝.

思维升华 (1)指数幂的运算首先将根式、分数指数幂统一为分数指数幂，以便利用法则计算，还应注意：

①必须同底数幂相乘，指数才能相加；

②运算的先后顺序．

(2)当底数是负数时，先确定符号，再把底数化为正数．

(3)运算结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数．

题型二　对数的运算

1．设2*a*＝5*b*＝*m*，且＋＝2，则*m*＝ .

答案

解析　由已知，得*a*＝log2*m*，*b*＝log5*m*，

则＋＝＋＝log*m*2＋log*m*5＝log*m*10＝2.

解得*m*＝.

2．计算：＝ .

答案　－20

解析　原式＝(lg 2－2－lg 52)×＝lg×10

＝lg 10－2×10＝－2×10＝－20.

3．计算：＝ .

答案　1

解析　原式

＝

＝

＝＝＝＝1.

思维升华 对数运算的一般思路

(1)拆：首先利用幂的运算把底数或真数进行变形，化成分数指数幂的形式，使幂的底数最简，然后利用对数运算性质化简合并．

(2)合：将对数式化为同底数的和、差、倍数运算，然后逆用对数的运算性质，转化为同底对数真数的积、商、幂的运算．

题型三　指数与对数的综合运算

例 (1)已知均不为1的正数*a*，*b*，*c*满足*ax*＝*by*＝*cz*，且＋＋＝0，求*abc*的值．

解　令*ax*＝*by*＝*cz*＝*k*.

由已知*k*>0且*k*≠1，

于是*x*lg *a*＝*y*lg *b*＝*z*lg *c*＝lg *k*，

故＝，＝，＝.

因为＋＋＝0，

所以＝0，

即＝0.

故lg(*abc*)＝0，得*abc*＝1.

(2)设log*aC*，log*bC*是方程*x*2－3*x*＋1＝0的两根，求的值．

解　由题意，得即

于是有

(log*Ca*－log*Cb*)2＝(log*Ca*＋log*Cb*)2－4log*Ca*·log*Cb*＝32－4＝5，

故log*Ca*－log*Cb*＝±.

于是＝－1＝＝±.

思维升华 指数、对数的综合运算，要充分利用对数的定义、指数、对数的运算性质，建立已知条件和所求式子间的联系．

跟踪训练 (1)若*a*log23＝1，*b*log35＝1，则9*a*＋5*b*＝ .

答案　7

解析　*a*＝log32，*b*＝log53，于是

(2)方程－＝3*x*－1的实数解为 ．

答案　*x*＝log32

解析　原方程可化为2(3*x*)2＋5·3*x*－18＝0，

即(3*x*－2)(2·3*x*＋9)＝0,3*x*＝2(2·3*x*＝－9舍去)，

得*x*＝log32.

(3)若log2log3*x*＝log3log2*y*＝log2log2*z*＝1，则*x*2，*y*3，*z*4从小到大的排列为 ．

答案　*x*2<*z*4<*y*3

解析　由题设得log3*x*＝2，log2*y*＝3，log2*z*＝2，

即*x*＝32，*y*＝23，*z*＝22，故*x*2＝34，*y*3＝29，*z*4＝28，

所以*x*2<*z*4<*y*3.

1．化简的结果为 ．

答案　－

解析　原式＝

＝－6*ab*－1＝－.

2．设2*x*＝8*y*＋1，9*y*＝3*x*－9，则*x*＋*y*的值为 ．

答案　27

解析　∵2*x*＝8*y*＋1＝23(*y*＋1)，∴*x*＝3*y*＋3，

∵9*y*＝3*x*－9＝32*y*，∴*x*－9＝2*y*，

解得*x*＝21，*y*＝6，∴*x*＋*y*＝27.

3．已知*a*－＝3(*a*>0)，则*a*2＋*a*＋*a*－2＋*a*－1的值为 ．

答案　11＋

解析　由*a*－＝3，得2＝9，

即*a*2＋－2＝9，故*a*2＋*a*－2＝11.

又(*a*＋*a*－1)2＝*a*2＋*a*－2＋2＝11＋2＝13，

且*a*>0，所以*a*＋*a*－1＝.

于是*a*2＋*a*＋*a*－2＋*a*－1＝11＋.

4．设*a*＝log310，*b*＝log37，则3*a*－*b*＝ .

答案

解析　∵*a*＝log310，*b*＝log37，∴3*a*＝10,3*b*＝7，

∴3*a*－*b*＝＝.

5．lg22·lg 250＋lg25·lg 40＝ .

答案　1

解析　lg22·lg 250＋lg25·lg 40

＝lg22·＋(1－lg 2)2·(2lg 2＋1)

＝lg22·(3－2lg 2)＋(lg22－2lg 2＋1)·(2lg 2＋1)＝1.

6．已知*a*＝log32，那么log38－2log36用*a*表示为 ．

答案　*a*－2

解析　log38－2log36＝log323－2(log32＋log33)

＝3log32－2(log32＋1)＝3*a*－2(*a*＋1)＝*a*－2.

7．若3*x*＝4*y*＝36，则＋＝ .

答案　1

解析　3*x*＝4*y*＝36，两边取以6为底的对数，得

*x*log63＝*y*log64＝2，

∴＝log63，＝log64，即＝log62，

故＋＝log63＋log62＝1.

8．设*f*(*x*)＝则*f*(*f*(－2))＝ .

答案

解析　因为*f*(－2)＝2－2＝，

所以*f*(*f*(－2))＝*f* ＝1－＝1－＝.

9．若*a*>0，且*ax*＝3，*ay*＝5，则＝ .

答案　9

解析　

10．(2018·徐州、连云港、宿迁检测)设函数*f*(*x*)＝则*f*(*f*(－1))的值为 ．

答案　－2

解析　因为*f*(－1)＝4－1＝，

所以*f*(*f*(－1))＝*f* ＝log2＝－2.

11．化简下列各式：

(1)0.5＋0.1－2＋－3π0＋；

(2)

解　(1)原式＝＋＋－3＋

＝＋100＋－3＋＝100.

(2)原式＝

＝÷＝.

12．若lg(*x*－*y*)＋lg(*x*＋2*y*)＝lg 2＋lg *x*＋lg *y*，求的值．

解　由已知得lg[(*x*－*y*)(*x*＋2*y*)]＝lg(2*xy*)，

则(*x*－*y*)(*x*＋2*y*)＝2*xy*，即*x*2－*xy*－2*y*2＝0，

也即(*x*－2*y*)(*x*＋*y*)＝0.

因为*x*>0，*y*>0，所以*x*＋*y*>0，于是有*x*＝2*y*，即＝2.

13．若*a*>1，*b*<0，且*ab*＋*a*－*b*＝2，则*ab*－*a*－*b*＝ .

答案　－2

解析　∵*a*>1，*b*<0，∴0<*ab*<1，*a*－*b*>1.

又(*ab*＋*a*－*b*)2＝*a*2*b*＋*a*－2*b*＋2＝8，

∴*a*2*b*＋*a*－2*b*＝6，

∴(*ab*－*a*－*b*)2＝*a*2*b*＋*a*－2*b*－2＝4，

∴*ab*－*a*－*b*＝－2.

14．已知log*a*18＝*p*，log*a*24＝*q*，用*p*，*q*表示log*a*1.5.

解　依题意有即

变形为解得

所以log*a*1.5＝log*a*＝log*a*3－log*a*2

＝－＝，

即log*a*1.5＝.

15．已知*a*>*b*>1，若log*ab*＋log*ba*＝，*ab*＝*ba*，则*ab*＝ .

答案　8

解析　∵*a*>*b*>1，∴log*ba*>1，

又由log*ab*＋log*ba*＝，得＋log*ba*＝，

可得log*ba*＝2，∴*a*＝*b*2，

又*ab*＝*ba*，∴*b*2*b*＝，

∴*b*＝2(*b*＝0舍去)，∴*a*＝4，故*ab*＝8.

16．已知*m*，*n*为正整数，*a*>0，*a*≠1，且 log*a*(*m*＋*n*)＝log*am*＋log*an*，求*m*，*n*的值．

解　log*a*(*m*＋*n*)＝log*am*＋log*an*＝log*a*(*mn*)．

比较真数得*m*＋*n*＝*mn*，即(*m*－1)(*n*－1)＝1.

∵*m*，*n*为正整数，∴解得